

N° d'ordre : D.U : **2046**  
EDSPIC : **486**

**UNIVERSITE BLAISE PASCAL - CLERMONT II**  
**ÉCOLE DOCTORALE**  
**SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR DE CLERMONT-FERRAND**  
Formation Doctorale :  
Matériaux - Structures - Fiabilité

**Thèse**  
Présentée par  
**NOUREDDINE RHAYMA**  
Ingénieur E.N.I.G

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR D'UNIVERSITÉ**  
Spécialité : Génie Civil

**Contribution à l'évolution des méthodologies de caractérisation  
et d'amélioration des voies ferrées**

Soutenue publiquement le 06 juillet 2010 devant le jury :

Mme.	Arézou MODARESSI	Rapporteur, présidente du jury
M.	Ahmed MEBARKI	Rapporteur
M.	Michel FOGLI	Directeur de thèse
M.	Pierre BREUL	Examineur
M.	Philippe BRESSOLETTE	Examineur
M.	Alain MILLARD	Examineur
M.	Gilles SAUSSINE	Examineur

## Remerciements

Une thèse n'est pas seulement l'aboutissement du travail d'un doctorant. C'est également une charge pour l'équipe d'encadrement, un jury et les proches. Cette courte page de remerciements leur est dédiée.

Je remercie Michel Fogli mon directeur de thèse, pour m'avoir soutenu et encadré pendant ces trois années de thèse. Les longues discussions avec lui ont pu souvent apporter des réponses à mes questions.

Je tiens aussi à remercier Philippe Bressolette et Pierre Breul, co-encadrants, pour m'avoir proposé ce sujet de thèse. Je les remercie également pour m'avoir dirigé patiemment, leurs conseils et leurs encouragements tout au long de mes travaux ainsi que pour le soutien constant pendant la rédaction de cette thèse. J'ai eu un réel plaisir à travailler à avec vous.

Je tiens également à remercier Gilles Saussine pour sa constante disponibilité, la qualité de ses conseils dans de nombreux domaines tant sur le plan scientifique que personnel et son soutien moral pendant les moments difficiles de la thèse ont été déterminants dans l'aboutissement de ce travail.

Je remercie également les membres du jury. Mme Arézou Modaressi et Ahmed Mebarki qui m'ont fait l'honneur de consacrer du temps à mon travail en acceptant la charge de rapporteur. Je les remercie également pour tous les commentaires suite à leur lecture attentive. Enfin je remercie Alain Millard pour sa participation au jury, l'intérêt qu'il a porté à mon sujet et ses encouragements.

J'ai la chance d'effectuer mes travaux de thèse au sein de la direction de la recherche et de l'innovation de la SNCF. Je tiens à faire part du plaisir que j'ai eu à côtoyer "les gens de la recherche" et en particulier à Florence Margiocchi et Jérôme Chalansonnet pour leur aide appréciable et appréciée dans mon travail que pour leur relation amicale et la Bonne humeur. Je remercie aussi Laurent Schmitt, Pierre-Etienne Gautier ainsi que Alain Robinet.

Je ne passerais pas sans dire MERCI et tous ceux que j'ai côtoyé durant ces années de thèses : à Virginie avec qui j'ai eu le plaisir de partager le bureau (avec toutes les discussions intéressantes que cela a entraîné), Vincent, Christophe, Estelle, Florent, Christine, Badreddine, Sönke, Phuong, Robert, Sofia ... Mes remerciements vont aussi à mes amis de Clermont-Ferrand : Fatéh, Hassan, Mahmoud, Nizar et mes amis de l'autre côté de la méditerranée. Merci à Ahlem pour ses conseils et ses encouragements.

Ce travail n'aurait pu aboutir sans l'aide inconditionnelle de ma famille, et en particulier mes parents qui m'ont toujours encouragé et soutenu tout au long de ces années.

Que toutes celles et ceux, plus ou moins proches, qui m'ont accompagné, sachent reconnaître ici une marque sincère de gratitude.

## Résumé

Le thème de recherche proposé s'inscrit dans une démarche de compréhension du comportement de la voie ballastée sous circulation commerciale. Les principaux objectifs de la thèse sont alors, d'une part la caractérisation des différents paramètres de la voie ainsi que leur variabilité et d'autre part la prédiction du comportement mécanique d'une voie ballastée par modélisation numérique afin d'optimiser les opérations de maintenance et de réduire les coûts d'entretien.

Ce travail se base en premier lieu, sur une approche expérimentale de mesure des caractéristiques mécaniques et géométriques des composants de l'infrastructure de la voie. Un couplage du pénétromètre dynamique Panda et géoendoscope a permis de mesurer les épaisseurs ainsi que les modules des différentes couches de la voie et de fournir ainsi une base de données complète. Un traitement statistique des échantillons de mesures a permis de décrire l'incertitude qui entache ces caractéristiques de la voie. Afin d'en prendre en compte la variabilité dans le modèle EF, nous présentons la méthode de collocation stochastique destinée à l'analyse probabiliste d'un modèle dynamique représentant une section de voie ferrée. Cette méthode permet l'estimation des moments statistiques du processus de réponse ou de toute variable de contrôle liée à ce processus.

Dans un second temps, nous avons mené une analyse paramétrique afin de quantifier de manière probabiliste l'apport des diverses opérations de maintenance : relevage de la voie, traitement de la sous-couche avec renouvellement du ballast et opération de traitement de la plate-forme par amélioration des conditions de drainage. Cette analyse a montré le grand apport des deux derniers types de traitement en termes de diminution de la dispersion de la réponse du modèle et surtout de réduction des risques de défaillance. L'apport des opérations d'amélioration des conditions de drainage reste cependant plus bénéfique pour le comportement de la voie en terme de sécurité.

**Mots clés :** voies ferrées, éléments finis stochastiques, méthode de collocation stochastique, fiabilité, maintenance.

## Abstract

The framework of the proposed research is the understanding of ballasted track behaviour in commercial traffic. The main goals of this research are the characterization of different track parameters and their variability and also the prediction of mechanical behavior of the track using numerical modeling in order to optimize maintenance operations and reduce maintenance costs.

This work is based primarily on experimental measurements of mechanical and geometrical parameters of the track infrastructure. A technic coupling dynamic penetrometer Panda to geoendoscopy was used to measure the thickness and the Young modulus of different track layers to provide a database. A statistical processing of measurement samples was conducted to describe the uncertainty of the track characteristics. To take into account this variability on the FE model, we present the stochastic collocation method allowing the probabilistic analysis of a dynamic model of a track section. This method provides estimation of statistical moments of the response process or any control variable related to this process.

In a second step, we conducted a parametrical study to quantify probabilistic contribution of the various maintenance operations : raising of the track, subballast layer treatment and improving drainage conditions of the track platform. This analysis has shown the great contribution of the two latter types of operation in terms of reducing the model response dispersion and especially on the failure probability. The contribution of drainage operation improvement remains more beneficial for the behavior of the way in terms of safety.

**Keyword :** railway tracks, stochastic finite elements, stochastic collocation ; Reliability, maintenance.



# Table des matières

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>12</b>
<b>1 Outils d'auscultation et analyse statistique des données des voies ferrées</b>	<b>14</b>
1.1 Introduction . . . . .	14
1.2 Les différents constituants de la voie . . . . .	15
1.3 Outils de diagnostic . . . . .	16
1.3.1 Mesures Mauzin . . . . .	17
1.3.2 Rolling Stiffness Measurement Vehicle . . . . .	18
1.3.3 Portancemètre ferroviaire . . . . .	20
1.3.4 Géoradar . . . . .	21
1.3.5 Pénétromètre dynamique . . . . .	23
1.3.6 Essais géo-endoscopiques . . . . .	25
1.3.7 Couplage Panda géo-endoscopie . . . . .	26
1.4 Présentation des sites de mesures . . . . .	28
1.4.1 Site de Riom . . . . .	28
1.4.2 Site de Laroche . . . . .	29
1.4.3 Site de Chambéry . . . . .	30
1.4.4 Site de Melun . . . . .	31
1.4.5 Conclusion . . . . .	31
1.5 Analyse statistique des mesures . . . . .	31
1.5.1 Estimation des moments statistiques . . . . .	33
1.5.2 Tests d'homogénéité . . . . .	36
1.5.3 Tests d'adéquation . . . . .	37
1.5.4 Analyse des corrélations des paramètres mesurés . . . . .	40
1.5.5 Conclusion . . . . .	43
1.6 Complémentarité des mesures des caractéristiques de voies . . . . .	44
1.6.1 Analyse de corrélation des caractéristiques de voie ferrée . . . . .	45
1.6.2 Épaisseur du ballast - rigidité de la voie . . . . .	45
1.6.3 Modules des couches - rigidité de la voie . . . . .	48
1.6.4 Conclusion . . . . .	49
1.7 Conclusions . . . . .	50
<b>2 Développement d'un modèle éléments finis de voie ferrée</b>	<b>51</b>
2.1 Introduction . . . . .	51
2.2 Modélisation des voies ferrées . . . . .	52
2.3 Expérience SNCF . . . . .	53
2.3.1 Modèles dynamiques réduits . . . . .	53
2.3.2 Modèles 3D de voie . . . . .	54
2.3.3 Modèles mixtes . . . . .	55
2.3.4 Conclusion . . . . .	56
2.4 Mise en œuvre d'un modèle EF de voie . . . . .	57

2.4.1	Loi de comportement des matériaux . . . . .	57
2.4.2	Maillage . . . . .	58
2.4.3	Conditions aux limites . . . . .	59
2.4.4	Chargement . . . . .	59
2.4.5	Simulation numérique . . . . .	60
2.5	Validation du modèle . . . . .	61
2.5.1	Critère de Boussinesq . . . . .	61
2.5.2	Validation numérique statique et dynamique . . . . .	64
2.6	Temps de calcul . . . . .	69
2.7	Conclusion . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Analyse probabiliste du comportement de la voie ferrée</b>	<b>72</b>
3.1	Introduction . . . . .	72
3.2	Modélisation probabiliste des paramètres . . . . .	72
3.3	Modélisation probabiliste du comportement de la voie ferrée . . . . .	73
3.3.1	Choix des paramètres aléatoires et de leurs lois . . . . .	74
3.3.2	Variables de contrôle . . . . .	74
3.4	Méthode des Éléments Finis Stochastiques . . . . .	75
3.4.1	Simulations de Monte-Carlo . . . . .	75
3.4.2	Méthode de collocation stochastique . . . . .	75
3.4.3	Analyse paramétrique . . . . .	78
3.4.4	Conclusion . . . . .	88
3.5	Analyse fiabiliste . . . . .	88
3.5.1	Données du problème . . . . .	89
3.5.2	Objectif fondamental . . . . .	89
3.5.3	Formulation standard du problème . . . . .	90
3.5.4	Marge de sécurité, performance . . . . .	91
3.5.5	Indice de Hasofer-Lind [31, 44] . . . . .	91
3.5.6	Méthode FORM [31, 44, 80] . . . . .	92
3.5.7	Méthode SORM [31, 46] . . . . .	93
3.5.8	Remarque à propos du couplage mécano-fiabiliste . . . . .	93
3.6	Conclusions . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Analyse par EFS d'un modèle de voie ferrée</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction . . . . .	95
4.2	Analyse de la propagation d'incertitude . . . . .	95
4.2.1	Introduction : analyse de sensibilité . . . . .	95
4.2.2	Analyse de sensibilité simplifiée . . . . .	96
4.2.3	Conclusion . . . . .	100
4.3	Analyse paramétrique des opérations de maintenance des voies ferrées . . . . .	100
4.3.1	Relevage de la voie . . . . .	101
4.3.2	Traitement de la couche intermédiaire . . . . .	107
4.3.3	Traitement de la plate-forme par amélioration des conditions de drainage . . . . .	112
4.4	Analyse fiabiliste d'un tronçon de voie ferrée . . . . .	117
4.4.1	Position du problème, données . . . . .	118
4.4.2	Estimation fiabiliste de l'état initial de référence . . . . .	119
4.4.3	Estimation fiabiliste de l'effet de relevage de la voie . . . . .	122
4.4.4	Estimation fiabiliste de l'effet du traitement de la sous-couche . . . . .	124
4.4.5	Estimation fiabiliste de l'effet du drainage . . . . .	124
4.4.6	Conclusion . . . . .	124
4.5	Conclusion . . . . .	125

<b>CONCLUSION GENERALE &amp; PERSPECTIVES</b>	<b>126</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>127</b>
<b>Annexes</b>	<b>134</b>
<b>A Vérification de l'ajustement d'une loi théorique à une distribution empirique par les tests d'adéquation de <math>\chi^2</math></b>	<b>134</b>
A.1 Introduction . . . . .	134
A.2 Position du problème . . . . .	134
A.3 Test de khi-deux . . . . .	135
<b>B Pratique du test d'adéquation de Kolmogorov</b>	<b>137</b>
B.1 Position du problème . . . . .	137
B.2 Résolution du problème . . . . .	137
<b>C Intervalles de confiance d'estimations</b>	<b>141</b>
C.1 Définition . . . . .	141
C.2 Forme des intervalles de confiance . . . . .	141
C.3 Intervalles de confiance pour l'espérance . . . . .	141
C.3.1 Cas où la variance est connue . . . . .	142
C.3.2 Cas où la variance est inconnue . . . . .	142
<b>D Modélisation stochastique des paramètres incertains</b>	<b>143</b>
D.1 Choix des lois de probabilité . . . . .	143
D.1.1 Variable aléatoire gaussienne n-dimensionnelle . . . . .	143
D.1.2 Variable aléatoire lognormale n-dimensionnelle . . . . .	144
D.1.3 Variable uniforme scalaire . . . . .	145

# Table des figures

1.1	Schéma d'une structure ferroviaire [79]. . . . .	15
1.2	Détails : traverses mono et biblocs, semelles sous-rail, attaches et rail. . . . .	16
1.3	Voiture Mauzin. . . . .	17
1.4	Différents défauts ponctuels de géométrie de la voie. a : nivellement longitudinal, vue latérale ; b : nivellement transversal, vue latérale, c : écartement, vue de dessus ; d : dressage, vue de dessus. . . . .	17
1.5	RSMV et principe de fonctionnement [13]. . . . .	18
1.6	Principe de la méthode de mesure de rigidité de la voie par RSMV [13]. . . . .	19
1.7	Principe de la méthode de mesure de rigidité de la voie par le portancemètre [49]. . . . .	20
1.8	Principe de la méthode de mesure de rigidité de la voie par le portancemètre [48, 49] . . . . .	21
1.9	Présentation schématique d'un système géoradar. . . . .	21
1.10	Les trois modes de propagation des ondes radar [34]. . . . .	22
1.11	Coefficient de réflexion des ondes radar [34] . . . . .	22
1.12	Exemple de représentation galvanométrique [34] . . . . .	23
1.13	Principe de fonctionnement du Panda. [42] . . . . .	24
1.14	Principe du géo-endoscope [22]. . . . .	25
1.15	Démarche complète de l'analyse de texture [22] . . . . .	26
1.16	Couplage géo-endoscope Panda [99] . . . . .	26
1.17	Structure générale du site de Riom. . . . .	29
1.18	Structure générale du site de Laroche. . . . .	29
1.19	Structure générale du site de Chambéry. . . . .	30
1.20	Valeurs du NL pour le site de Chambéry (tournée de juin 2007) . . . . .	31
1.21	Structure générale du site de Melun. . . . .	31
1.22	Histogrammes des paramètres du site de Laroche. . . . .	38
1.23	Histogrammes des paramètres du site de Chambéry. . . . .	39
1.24	Histogrammes des paramètres du site de Melun. . . . .	40
1.25	Exemple de résultats RSMV. . . . .	45
1.26	Mesures géoradar et RSMV. . . . .	46
1.27	Rigidité de la voie (RSMV) en fonction de l'épaisseur de ballast. . . . .	47
1.28	Mesures Panda et RSMV. . . . .	47
1.29	Mesures Panda et RSMV. . . . .	48
1.30	$q_d$ en fonction de la rigidité de la voie pour les deux fréquences d'échantillonnage. . . . .	49
2.1	Modélisation des voies ferrées [73] . . . . .	52
2.2	Principe de modélisation sur Dynavoie [45]. . . . .	53
2.3	Exemple de modèle 3D de voie ferrées sur CESAR [27]. . . . .	55
2.4	Schématisation du modèle mixte de Ricci [82]. . . . .	56
2.5	Maillage d'un modèle à 3 traverses. . . . .	58
2.6	Exemple de déformée de la structure. . . . .	60
2.7	Contrainte équivalente de Von Mises à un instant de calcul. . . . .	60
2.8	Évolution de la contrainte en fonction de la déflexion au cours du passage des deux charges dans la couche de ballast. . . . .	61



2.9	Déplacement vertical au niveau de la ligne d'application de la charge au centre du modèle.	62
2.10	Contrainte verticale au niveau de la ligne d'application de la charge au centre du modèle.	63
2.11	Contrainte horizontale au niveau de la ligne d'application de la charge au centre du modèle.	63
2.12	Coupe transversale de la voie sur le site de Beugnâtre.	64
2.13	Répartition des charges sur les traverses adjacentes sous l'effet de charge de roue appliquée au dessus d'une traverse.	65
2.14	Contraintes de Von Mises sous charge statique.	66
2.15	Déflexions verticales sous traverse.	67
2.16	Déplacements verticaux au niveau du rail.	67
2.17	Accélérations verticales de traverse mesurées lors de passage d'une rame de TGV [105].	68
2.18	Accélérations verticales correspondant au passage du premier bogie mesurées sous les traverses [105].	68
2.19	Accélérations verticales (%g) de la traverse 25.	69
2.20	Evolution du $\tilde{N}L$ en fonction du nombre de traverses du modèle.	70
2.21	Evolution des temps de calcul en fonction du nombre de traverses du modèle.	70
3.1	Evolution de la moyenne de la déflexion de la traverse ( $M_1 = S_d$ ) en fonction du nombre de simulations.	79
3.2	Evolution de la moyenne de l'accélération de la traverse ( $M_2 = S_a$ ) en fonction du nombre de simulations.	80
3.3	Evolution de l'écart-type de $M_2 = S_a$ en fonction du nombre de simulations.	80
3.4	Evolution de l'écart-type de $M_1 = S_d$ en fonction du nombre de simulations.	81
3.5	Evolution de la moyenne (gauche) et de l'écart-type (droite) de $M_1 = S_d$ en fonction du nombre de points de collocation.	81
3.6	Convergence de l'estimation de la moyenne (gauche) et de l'écart-type (droite) de $M_1 = S_d$ en fonction du nombre de points collocation.	82
3.7	Densité de probabilité de $M_1 = S_d$ .	83
3.8	Distribution de $M_1 = S_d$ pour les différentes distributions considérées de $\mathbf{Y}$ : uniforme (UD), Gaussienne (GD), lognormale (LND) et lognormale tronquée avec support $S_1(Y)$ (TLND/ $S_1(Y)$ ) et avec support $S_2(Y)$ (TLND/ $S_2(Y)$ ).	85
3.9	Distribution de $M_3 = R_d$ pour les différentes distributions considérées de $\mathbf{Y}$ : uniforme (UD), Gaussienne (GD), lognormale (LND) et lognormale tronquée avec support $S_1(Y)$ (TLND/ $S_1(Y)$ ) et avec support $S_2(Y)$ (TLND/ $S_2(Y)$ ).	86
3.10	Distribution de $M_1 = S_d$ pour le cas corrélé et non corrélé de $\mathbf{Y}$ .	88
3.11	Indice de Hasofer-Lind ( $p = 2$ ).	91
3.12	Convergence de l'algorithme d'optimisation par couplage MEFS/FORM.	94
4.1	Évolution du coefficient de variation de $M_1 = S_d$ en fonction du coefficient de variation de chaque paramètre aléatoire $Y_i$ .	97
4.2	$\Delta CV_{M_j}$ des différents paramètres $Y_i$ .	98
4.3	Indices de propagation d'incertitude pour chaque variable de contrôle.	99
4.4	Exemple d'opération de relevage.	101
4.5	Densité de probabilité de $M_4 = \tilde{N}L$ (m) avant et après relevage.	103
4.6	Densité de probabilité de $M_3 = R_d$ avant et après relevage.	104
4.7	Densité de probabilité de $M_1 = S_d$ avant et après relevage.	105
4.8	Densité de probabilité de $M_2 = S_a$ avant et après relevage.	106
4.9	Evolution des moyennes des variables de contrôle en fonction du niveau de relevage (cm).	107
4.10	Densité de probabilité de $M_4 = \tilde{N}L$ avant et après traitement de la sous-couche.	109
4.11	Densité de probabilité de $M_3 = R_d$ avant et après traitement de la sous-couche.	110
4.12	Densité de probabilité de $M_1 = S_d$ avant et après traitement de la sous-couche.	111
4.13	Densité de probabilité de $M_2 = S_a$ avant et après traitement de la sous-couche.	112

4.14	Exemple d'opération d'exécution de fossés de drainage. . . . .	113
4.15	Densité de probabilité de $M_4 = \tilde{N}L$ (m) avant et après l'opération de drainage. . . . .	114
4.16	Densité de probabilité de $M_3 = R_d$ avant et après l'opération de drainage. . . . .	115
4.17	Densité de probabilité de $M_1 = S_d$ avant et après l'opération de drainage. . . . .	116
4.18	Densité de probabilité $M_2 = S_a$ avant et après l'opération de drainage. . . . .	117
4.19	Evolution de la probabilité de défaillance avec le niveau de relevage pour le critère 1. . .	121
4.20	Evolution de la probabilité de défaillance avec le niveau de relevage pour le critère 2. . .	122
4.21	Evolution de la probabilité de défaillance avec le niveau de relevage correspondant au critère 1. . . . .	123
4.22	Evolution de la probabilité de défaillance avec le niveau de relevage correspondant au critère 2. . . . .	123

# Liste des tableaux

1.1	Coefficient de Buisman d'après Sanglerat, Bachelier et Parez [4, 77]	27
1.2	Coefficient de Buisman selon d'autres sources	27
1.3	Statistiques des mesures pour le site de Riom.	33
1.4	Statistiques des mesures pour le site de Laroche.	34
1.5	Statistiques des mesures pour le site de Chambéry.	34
1.6	Statistiques des mesures pour le site de Melun.	35
1.7	Résultats des tests d'homogénéité sur Laroche.	36
1.8	Résultats des tests d'homogénéité sur le site de Chambéry.	36
1.9	Résultats des tests d'homogénéité sur le site de Melun.	36
1.10	Tests d'ajustement des paramètres du site de Laroche.	37
1.11	Tests d'ajustement des paramètres du site de Chambéry.	38
1.12	Tests d'ajustement des paramètres du site de Melun.	39
1.13	Matrice de corrélation (%) des paramètres du site de Laroche.	41
1.14	Matrice de corrélation (%) des paramètres du site de Chambéry.	42
1.15	Corrélations des paramètres du site de Chambéry avec le $NL$ .	42
1.16	Matrice de corrélation (%) des paramètres du site de Melun.	42
1.17	Coefficients de Buisman $\alpha$ retenus pour les différents sites étudiés.	43
1.18	Résultats du traitement statistique des différents sites.	44
1.19	Coefficients de corrélations modules des couches - rigidité de la voie.	48
1.20	Coefficients de corrélations $q_d$ - rigidité de la voie.	49
1.21	Paramètres retenus pour le modèle numérique.	50
2.1	Taille des mailles pour les composants du modèle.	58
2.2	Caractéristiques des matériaux du site de Beugnâtre.	65
2.3	Répartition des charges sur les traverses adjacentes.	66
3.1	Moyennes et écarts-types des v.a. $Y_i$ .	74
3.2	Moyennes ( $m_{M_i}$ ) et écarts-types ( $\sigma_{M_i}$ ) obtenus par la méthode de collocation et par simulations de Monte-Carlo pour les variables de contrôle $M_1, M_2, M_3$ et $M_4$ .	82
3.3	Moyenne ( $m_{M_1}$ ), écart-type ( $\sigma_{M_1}$ ), coefficient d'asymétrie ( $S_{M_1}$ ) d'aplatissement ( $K_{M_1}$ ) de la variable de contrôle $M_1 = S_d$ pour les différentes distributions de $\mathbf{Y}$ .	85
3.4	Valeurs des coefficients de corrélation $\rho_{Y_j Y_k}$ , pour $j, k \in \{1, 2, 5, 6\}$ .	86
3.5	Moyenne ( $m_{M_1}$ ), écart-type ( $\sigma_{M_1}$ ), coefficient d'asymétrie ( $S_{M_1}$ ) et d'aplatissement ( $K_{M_1}$ ) de la variable de contrôle $M_1 = S_d$ pour les deux cas suivants : $\mathbf{Y}$ à composantes corrélées et $\mathbf{Y}$ à composantes non corrélées.	87
4.1	Moyennes et écarts-types des v.a. $Y_i$ .	97
4.2	Valeurs de $\Delta CV_{M_1}$ correspondant à $0.4 CV_{Y_i}^{exp}$ pour chaque paramètre aléatoire $Y_i$ .	98
4.3	Caractéristiques des variables aléatoires retenues.	100
4.4	Corrélation $C_{Y_i, Y_j}$ (%) entre les v.a. $Y_i, Y_j$ .	101
4.5	Moments statistiques des différentes variables de contrôle $M_i, i = 1, \dots, 4$ .	101
4.6	Caractéristiques des variables après une opération de relevage.	102

4.7	Statistiques de $M_4 = \tilde{N}L$ (m) après une opération de relevage. . . . .	102
4.8	Statistiques de la déflexion du rail $M_3 = R_d$ après une opération de relevage. . . . .	103
4.9	Statistiques de $M_1 = S_d$ après une opération de relevage. . . . .	104
4.10	Statistiques de $M_2 = S_a$ après une opération de relevage. . . . .	105
4.11	Caractéristiques de la plate-forme ferroviaire après une opération de traitement de la sous-couche. . . . .	108
4.12	Statistiques de $M_4 = \tilde{N}L$ après une opération de traitement de la sous-couche. . . . .	108
4.13	Statistiques de $M_3 = R_d$ après une opération de traitement de la sous-couche. . . . .	109
4.14	Statistiques de $M_1 = S_d$ après une opération de traitement de la sous-couche. . . . .	110
4.15	Statistiques de $M_2 = S_a$ après traitement de la sous-couche. . . . .	111
4.16	Caractéristiques de la plate-forme ferroviaire avant et après une opération de drainage. . . . .	113
4.17	Statistiques de $M_4 = \tilde{N}L$ après l'opération de drainage. . . . .	113
4.18	Statistiques de $M_3 = R_d$ après l'opération de traitement de la couche de forme. . . . .	114
4.19	Statistiques de $M_1 = S_d$ après une opération de traitement de la plate-forme. . . . .	115
4.20	Statistiques de $M_2 = S_a$ après l'opération de drainage. . . . .	116
4.21	Moyennes et écarts-types des paramètres aléatoires dans la situation initiale de référence. . . . .	118
4.22	Valeurs des coefficients de corrélation $C_{Y_i, Y_j}(\%)$ des couples $(Y_i, Y_j)$ . . . . .	119
4.23	Indice de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ) et probabilité de défaillance pour les cas analysés. . . . .	120
4.24	Indice de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ) et probabilité de défaillance $P_f$ pour les cas analysés. . . . .	121
4.25	Indice de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ) et probabilité de défaillance $P_f$ pour les cas analysés. . . . .	122
4.26	Indice de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ) et probabilité de défaillance pour les cas analysés. . . . .	124
4.27	Indice de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ) et probabilité de défaillance pour les cas analysés. . . . .	124

# INTRODUCTION GENERALE

Dans son livre blanc sur les transports [58], la Commission Européenne prévoit un rééquilibrage des modes de transport qui devrait se traduire d'ici 2020 par une augmentation de l'ordre de 15 % du trafic ferroviaire sur les réseaux classiques de l'espace communautaire. Dans le cas particulier de la France, pour faire face à l'augmentation attendue du trafic ferroviaire sur les réseaux classiques et grandes vitesses, une remise à niveau de certaines portions vieillissantes du réseau apparaît impérative pour faire face à l'augmentation des tonnages, des vitesses et des charges à l'essieu tout en conservant des niveaux identiques de sécurité et de fiabilité. Afin de répondre aux augmentations de trafic, il apparaît donc nécessaire d'adopter une méthodologie rationnelle de dimensionnement des remises à niveau de lignes, appuyée sur des techniques innovantes de diagnostic et d'évaluation de l'existant, sur l'utilisation de modèles numériques et sur une méthodologie scientifique de validation des structures innovantes. Le projet européen Innotrack (Innovative Track Systems, ou systèmes innovants pour la voie) s'inscrit dans ce cadre. Il a pour objectif le développement d'une infrastructure de la voie à hautes performances (sur des réseaux ferroviaires hautement sollicités) et à un coût aussi réduit que possible. Innotrack associe pratiquement tous les acteurs impliqués dans le transport ferroviaire – industriels du secteur ferroviaire et entreprises de construction de voies, gestionnaires d'infrastructures (GI), entreprises ferroviaires (EF) et intégrateurs de systèmes – appuyés par le réseau d'excellence – en matière universitaire et de recherche – réuni à l'échelle de l'Union Européenne. Ce projet de recherche, d'un coût global estimé à 18,6 millions d'euros, s'est étendu sur 3 ans. Un des thèmes de recherches abordés consistait à proposer des solutions permettant de mesurer et de tenir compte des problèmes de dégradations des voies. Cette dégradation a pour origine en partie la variabilité des caractéristiques des composants de la voie et en particulier des éléments formant l'infrastructure.

Le thème de recherche proposé s'inscrit dans une démarche de compréhension du comportement de la voie ballastée sous circulation commerciale. La dégradation de la géométrie de la voie conduit à des opérations de maintenance onéreuses et la grande vitesse nécessite de prédire l'évolution des défauts de voie pour un nombre de circulations très important. La compréhension des mécanismes conduisant à cette dégradation et la prédiction du comportement mécanique d'une voie ballastée à long terme sont des enjeux en terme de modélisation afin d'optimiser les opérations de maintenance et réduire les coûts d'entretien des réseaux. En particulier, l'aspect économique prend de plus en plus d'ampleur avec l'ouverture à la concurrence du marché du transport ferroviaire.

Il apparaît donc nécessaire de concevoir et d'adopter une méthodologie rationnelle de dimensionnement des remises à niveau de lignes, s'appuyant sur des techniques innovantes de diagnostic et d'évaluation de l'existant. Cependant, il est nécessaire dans ce type d'analyse de disposer des moyens techniques permettant de mesurer les caractéristiques de la voie. Ces outils sont d'une grande utilité pour prédire le comportement de la voie d'autant plus s'ils sont couplés à des outils de simulations numériques et notamment à la méthode des éléments finis.

Le besoin d'investigation et de caractérisation précise de la plate-forme ferroviaire est aujourd'hui crucial pour les gestionnaires d'infrastructure, afin de permettre un diagnostic précis, un meilleur ciblage des actions correctives et une anticipation améliorée de la maintenance. De nos jours, les opérations de maintenance ont pour objectif principal de corriger les défauts géométriques détectés lors des tournées d'inspection et de contrôle par Mauzin ou IRIS320 [2]. Mis à part pour certains cas particuliers, la

caractérisation des paramètres mécaniques reste peu répandue. Cependant, des outils de mesures sont disponibles.

Le recours aux outils de simulations numériques est quant à lui fréquent dans le domaine de l'ingénierie ferroviaire. Les travaux de simulation ont permis de mieux comprendre le comportement des voies ferrées mais ils sont restreints au cas déterministe et n'ont pas abordés les problèmes de variabilité. Or l'ingénierie ferroviaire a pris conscience de l'importance de traiter les problèmes d'hétérogénéité qui touchent les plates-formes ferroviaires et des risques qui peuvent être encourus. Les outils de simulation numérique peuvent, dans ce contexte, apporter des éléments permettant de mieux comprendre le comportement des voies ferrées. Cependant, cette modélisation, pour être réaliste, nécessite de prendre en compte, via une modélisation probabiliste adaptée, l'hétérogénéité et la variabilité, spatiales et/ou temporelles, des propriétés des composants de la voie et de son support.

Cet apport des probabilités dans l'approche la mécanique permet de passer à un stade plus évolué de l'analyse de comportement des structures. L'intérêt de ce type d'analyse dans le domaine ferroviaire est signalé par plusieurs auteurs pour des problèmes d'infrastructure [53, 33] ou d'interaction roue-rail [76].

Le but de ce travail est tout d'abord de proposer une méthode permettant la quantification de la variabilité des caractéristiques de la voie ferrée en vue d'une analyse stochastique. Ceci passe par la sélection des paramètres les plus pertinents ainsi que des outils expérimentaux permettant de quantifier cette variabilité. Le second objectif de ce travail est de proposer une approche numérique permettant la prise en compte de cette variabilité. Le recours aux méthodes des éléments finis stochastiques – alternatives aux méthodes de Monte-Carlo – s'impose dans ce type d'analyse. Dans ce travail, nous ferons donc appel à une méthode originale [11] permettant, à moindre coût de calcul, d'estimer la variabilité qui entache certaines observations de la réponse du modèle éléments finis développé à cette fin. L'estimation de la variabilité de la réponse du système sert, en premier lieu, pour une analyse de propagation d'incertitudes et, en second lieu, à l'analyse de risque (ou de fiabilité), moyennant le calcul de probabilités de ruine.

Dans le premier chapitre de cette thèse, nous présentons quelques outils actuels utilisés pour l'auscultation des plates-formes ferroviaires, en prêtant une attention particulière à la technique couplant le pénétromètre dynamique Panda et le géoendoscope. Le traitement statistique des résultats de mesure sur sites réels est également abordé dans ce chapitre. Le deuxième chapitre est consacré au développement et à la validation d'un modèle numérique de voie ferrée par la méthode des éléments finis. Le troisième chapitre présente la méthode de collocation stochastique utilisée par la suite. Nous rappelons également dans ce chapitre quelques notions de fiabilité. Le dernier chapitre est consacré aux différentes applications menées dans le cadre de ce travail, concernant l'analyse de la propagation des incertitudes et l'évaluation fiabiliste des opérations de maintenance les plus courantes dans le domaine ferroviaire.

# Chapitre 1

## Outils d'auscultation et analyse statistique des données des voies ferrées

### 1.1 Introduction

Les dernières décennies ont vu le développement des outils de reconnaissance des sols en place [23, 61, 62]. En admettant des lois de comportement bien définies à l'échelle macroscopique, il est donc désormais possible, en utilisant ces outils de reconnaissance, d'aboutir à des modèles approchés du comportement des sols (compressibilité, perméabilité, résistance au cisaillement, etc.)[65]. Ces modèles de mécanique des sols classique sont ensuite utilisés dans les calculs numériques à condition de bien choisir les valeurs des paramètres. Toutefois, le choix des valeurs représentatives reste la tâche la plus délicate, car elle nécessite le plus d'expérience et de réflexion de la part de l'ingénieur praticien. La variabilité naturelle de la composition des sols, et de leur état, ainsi que l'influence des facteurs extérieurs (environnement) sur leur comportement, font des sols des milieux hétérogènes, rendant ainsi ce choix difficile.

Depuis quelques décennies une nouvelle branche de la mécanique des sols est apparue qui s'est fixée pour objectif de traiter quantitativement la variabilité naturelle des sols et l'incertitude affectant le dimensionnement des ouvrages et les risques encourus [23, 61, 62]. Les approches de caractérisation de cette variabilité se basent souvent sur une approche par variables aléatoires utilisant des méthodes classiques d'analyse statistique, en recherchant les lois de distribution, les moments statistiques et les corrélations qui peuvent exister entre les différentes variables aléatoires modélisant les paramètres incertains, ou par des champs stochastiques permettant alors de reproduire la variabilité spatiale et/ou temporelle de ces paramètres.

Dans ce cadre, les plates-formes ferroviaires sont considérées comme des milieux à forte variabilité due à leur composition (stratification et nature des sols), leur géométrie (grands linéaires), leur mode de fabrication et d'entretien et à l'influence des conditions environnementales. Cependant, le recours aux méthodes classiques de reconnaissance des sols *in situ* pour caractériser la variabilité des plate-formes ferroviaires peut nécessiter l'interruption du trafic et donc s'avérer très coûteux pour obtenir un échantillon statistique représentatif. Consciente de l'importance de la mesure et de la prise en compte de la variabilité affectant les voies ferrées, l'ingénierie ferroviaire s'est appropriée des outils de reconnaissance dédiés au domaine ferroviaire (Mauzin[2], RSMV[13]) ou a adapté d'autres outils pour les applications ferroviaires (Panda, géoendoscope, Portancemètre, Géoadar). La majorité de ces outils est basée sur la mesure de caractéristiques globales de la voie, superstructure incluse, telles que accélérations, déflexions, portance.... Ces outils ne permettent donc pas d'identifier l'emplacement exact et la nature du défaut. Par ailleurs, ils ne suffisent pas à caractériser l'ensemble des paramètres des différents composants de la structure ferroviaire (géométrie et caractéristiques physico-mécaniques).

Ce chapitre est consacré à une description d'outils et de techniques de diagnostic couramment utilisés pour l'auscultation des voies ferrées. Nous prêterons une attention particulière à la technique couplant l'utilisation du pénétromètre dynamique de type Panda et du géoendoscope, dans le but de quantifier la variabilité affectant les couches de sol composant la plate-forme. Nous procédons ensuite au traitement statistique des résultats des mesures en vue de proposer des valeurs représentatives des propriétés mécaniques à introduire dans un modèle numérique.

La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à l'analyse de corrélation entre les diverses caractéristiques de la voie ferrée mesurées par des techniques différentes, afin d'examiner la complémentarité de celles-ci.

## 1.2 Les différents constituants de la voie

Il existe deux types de voies ferrées : les voies sur ballast et les voies sur dalle. Les voies ballastées, largement majoritaires en France, sont l'objet de notre étude. Dans ce cadre, la voie ferrée est un système multicouche constituée d'un assemblage d'éléments d'élasticité et d'amortissement variables qui transmettent à la plate-forme, elle-même déformable, la charge dynamique des roues. La voie classique comporte deux rails dont l'inclinaison et l'écartement sont maintenus par des traverses reposant sur une couche de ballast (figure 1.1).

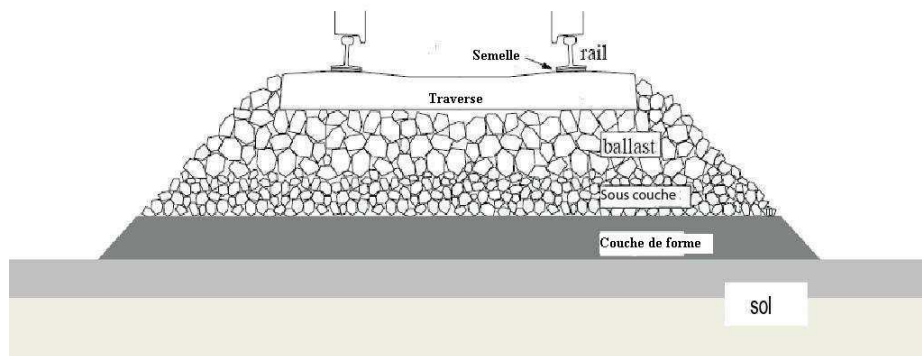


FIGURE 1.1: Schéma d'une structure ferroviaire [79].

Le rail a pour rôle, en plus du guidage de la roue, de répartir la charge sur les différentes traverses et sur le support, de reprendre les efforts latéraux et de les transmettre aux traverses et au support, et de permettre le roulement sur une surface lisse tout en reprenant les efforts de freinage et d'accélération par frottement. Les rails courants, dits "Vignoles" (figure 1.2) sont fabriqués en acier laminé et composés d'un champignon assurant le contact roue-rail, d'une partie médiane mince appelée âme et d'un patin qui transmet les efforts aux traverses.

Les semelles sous rail ont pour fonction de transmettre les efforts du rail aux traverses et d'amortir une partie des vibrations (dans le domaine des hautes fréquences). Leurs propriétés d'élasticité en font un composant essentiel de la voie. Elles ont été introduites avec les traverses béton afin de protéger ces dernières des chocs dynamiques et de rétablir l'élasticité naturelle des traverses bois. Les attaches de rail sont des dispositifs de fixation du rail aux traverses.

Les traverses ont pour fonction de fournir un support pour le rail et la possibilité de le fixer et de transmettre aussi uniformément que possible les efforts du rail au ballast tout en préservant l'alignement et l'écartement des rails. Il existe deux types de traverses béton : les traverses mono-blocs et les traverses bi-blocs. Une traverse mono-bloc est constituée d'un bloc unique supportant deux rails, alors qu'une traverse bi-bloc est composée de deux blocs en béton armé, appelés blochets, supportant chacun un rail. Ces blochets sont alors reliés par une entretoise, poutre en acier permettant la cohésion et la stabilité du système. Les lignes à grande vitesse sont équipées de traverses bi-bloc VAX U 41



(figure 1.2) séparées consécutivement de 60 cm.

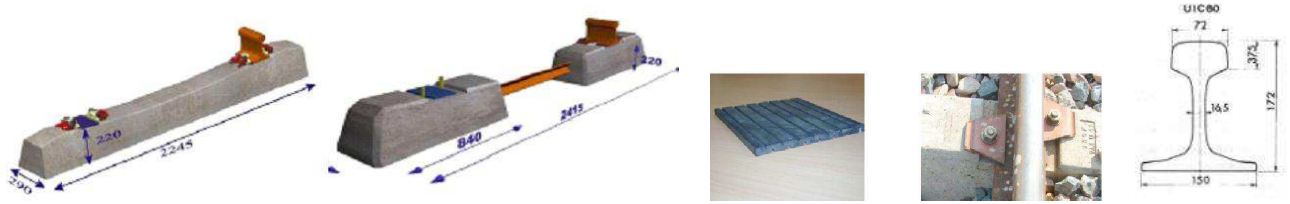


FIGURE 1.2: Détails : traverses mono et biblocs, semelles sous-rail, attaches et rail.

La couche de ballast est constituée de cailloux de taille normalisée (25/50 mm) [2, 15, 91], provenant du concassage de roches dures. Son rôle principal est l'ancrage des traverses. Elle permet la transmission des charges des traverses aux couches inférieures composant la plate-forme, l'amortissement des émissions acoustiques et des vibrations grâce au frottement entre les grains, le maintien en place des traverses et un nivellement facile et précis de la voie. Grâce à sa granulométrie, il permet également le drainage des eaux pluviales et contribue à la protection au gel de la plate-forme.

La sous-couche est composée de graves propres. Son rôle est de contribuer à la portance, de protéger la plate-forme contre l'érosion (sous l'action de l'eau et du ballast) et le gel, ainsi que de poursuivre la répartition des charges transmises. La couche de forme permet d'améliorer la portance du sol naturel ou du remblai [2, 15, 91]. Elle peut être rapportée (et est alors constituée de matériaux allochtones, le plus souvent granulaires) ou non (et est alors de même nature que le sol). Son traitement par des liants hydrauliques (chaux, ciment) peut être nécessaire afin d'en réduire la sensibilité à l'eau.

La voie supporte des efforts verticaux, transversaux et longitudinaux. Si les efforts longitudinaux ont peu d'influence sur la superstructure [2, 78], les autres ont des actions déterminantes sur les éléments constitutifs. La masse par essieu, la charge annuelle totale et la vitesse constituent les paramètres fondamentaux dans l'étude des efforts et de la fatigue supportés par la voie. Les besoins croissants en terme de transport ferroviaire ont conduit à des augmentations de tonnage et de vitesse. Cette surexploitation, en plus du vieillissement des réseaux et des mauvaises conditions de drainage, ont comme conséquence la création d'hétérogénéités, qui se manifestent par des problèmes de tassements et même de ruine.

### 1.3 Outils de diagnostic

L'auscultation des voies ferrées peut être réalisée par différentes techniques qui peuvent être classées en deux grandes familles :

- la première concerne les outils permettant des mesures en continu et globales de la qualité ou des caractéristiques de la voie ; citons à titre d'exemple le Rolling Stiffness Measurement Vehicle (RSMV [13]), le géoradar, le portancemètre ferroviaire [48], le Mauzin [2] ou encore le déflectomètre à masse tombante (FWD [2] en anglais) ;
- la deuxième catégorie d'outils permet d'effectuer des mesures localisées et ponctuelles : ce type d'outils permet d'avoir des informations plus ciblées et plus riches [75]. A titre d'exemple nous pouvons citer le carottage et les essais pénétrométriques.

L'importance de la taille du réseau ferroviaire favorise les méthodes d'auscultation en continu. Dans ce qui suit, nous donnons une description de moyens existants d'évaluation des propriétés mécaniques et géométriques d'une structure ferroviaire.

### 1.3.1 Mesures Mauzin

En France, l'organisation du plan de maintenance du réseau ferré prend en compte les mesures périodiques de dégradation de la géométrie de la voie. Les mesures sont effectuées par la voiture Mauzin (figure 1.3) qui permet de calculer des indicateurs représentatifs de la qualité de la voie (par tronçon de 200 m ou 1000 m). Ces indicateurs appelés Mauzin synthétiques [70, 2] permettent de suivre l'évolution de la qualité globale de la géométrie de la voie, afin de programmer les travaux de maintenance corrective, comme par exemple le bourrage.

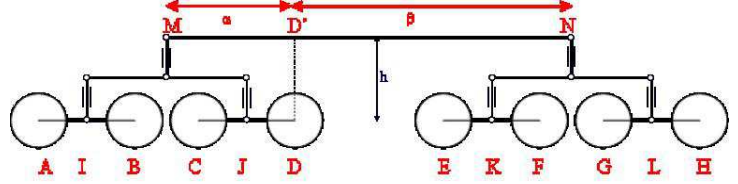


FIGURE 1.3: Voiture Mauzin.

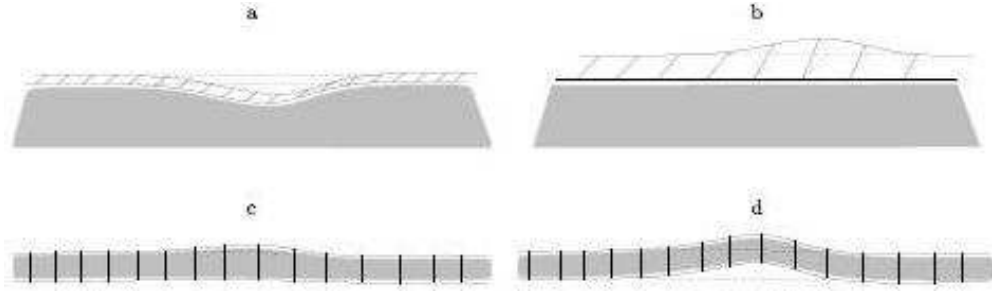


FIGURE 1.4: Différents défauts ponctuels de géométrie de la voie. a : nivellement longitudinal, vue latérale ; b : nivellement transversal, vue latérale ; c : écartement, vue de dessus ; d : dressage, vue de dessus.

Pour chaque type de dégradation (figure 1.4), il existe des indicateurs synthétiques tels que :

- NT (Nivellement Transversal) : correspondant à l'écart de dévers et gauche,
- D (Dressage) : traduisant la régularité du tracé réel,
- Ec (Ecartement) : correspondant à la moyenne d'écartement entre les deux files de rails,
- NL (Nivellement Longitudinal) : obtenu à partir de la dénivellation locale mesurée sur chaque file de rail par rapport au profil en long moyen de la voie. Le calcul est assez simple : l'idée est de calculer la différence d'ordonnée entre les représentations Eulériennes et Lagrangiennes d'une roue. Avec les données définies sur la figure 1.3, cette différence s'écrit :

$$\begin{aligned}
 N &= z_D - [z_{D'} - h] \\
 &= z_D - \frac{1}{\alpha + \beta} [\beta z_I + \alpha z_J] + h \\
 &= z_D - \frac{1}{4(\alpha + \beta)} [(\beta(z_A + z_B + z_C + z_D)) + (\alpha(z_E + z_F + z_G + z_H))]
 \end{aligned}$$

Le NL est alors l'écart-type des enregistrements, sur une distance de 200 m, de  $N$ .

Toutefois ces indicateurs ne permettent pas d'identifier l'origine et la localisation de la dégradation des propriétés mécaniques d'une structure ferroviaire.

### 1.3.2 Rolling Stiffness Measurement Vehicle

Le Rolling Stiffness Measurement Vehicle (figure 1.5), est un véhicule de chargement de la voie, constitué d'un wagon de fret à deux axes, équipé de deux masses hydrauliques vibrantes (de 6000 kg chacune). Il permet de mesurer les rigidités des assises des voies ferrées.

La rigidité de voie ( $k$  [kN/mm]) est définie par le rapport entre la charge appliquée à la voie ( $F$ ) et la déflexion de la voie ( $z$ ) (Eq. 1.1). Elle est souvent considérée comme constante si la charge est statique. Dans le cas d'une charge dynamique, l'inverse de la rigidité dynamique de la voie est alors utilisé et est appelé réceptance de la voie ( $\alpha$ ) ou flexibilité dynamique (Eq. 1.2). La réceptance est une quantité complexe, souvent décrite par une amplitude et une phase. L'utilisation de la grandeur réceptance de la voie plutôt que la rigidité dynamique tient au fait que la plupart des systèmes étudiés sont pilotés en force [36].

$$k(t) = \frac{F(t)}{z(t)} \quad (1.1)$$

$$\alpha(t) = \frac{z(t)}{F(t)} \quad (1.2)$$

#### Dispositif technique proposé par le gestionnaire d'infrastructure suédois (Banverket)

La méthode développée par Banverket [13], et implémentée dans le RSMV, est basée sur un axe de mesure qui comporte une charge constante et une charge dynamique variable. La voie subit une excitation dynamique via deux masses oscillantes montées au-dessus de l'un des deux essieux comme montré sur la figure 1.5. La rigidité de la voie est ensuite calculée à partir des mesures de l'accélération et de la force.

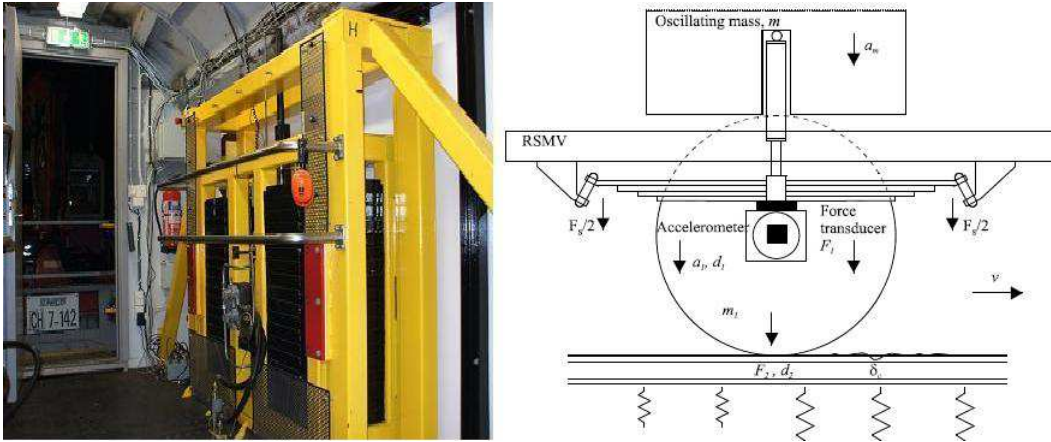


FIGURE 1.5: RSMV et principe de fonctionnement [13].

Le principe de mesure est détaillé sur la figure 1.6. Le système hydraulique excite la voie via les charges statique et dynamique (Eq. 1.3). La force est mesurée via un capteur de force placé au-dessus de l'axe de la roue de mesure, et l'accélération est mesurée au niveau de l'axe de celle-ci. Les quantités mesurées  $F_1$  et  $a_1$  (comme indiquées sur la figure 1.6) sont obtenues, pour chaque roue de mesure, via deux capteurs de force et deux accéléromètres. La force de contact entre la roue et le rail  $F_2$  est calculée à partir de l'équation du mouvement de Newton (Eq. 1.4).

$$F_1(t) = P_{stat} + P_{dyn} \sin(2\pi ft) \quad (1.3)$$

$$F_2(t) = F_1(t) - ma_1(t) \quad (1.4)$$

avec  $m$  la masse de la roue de mesure.

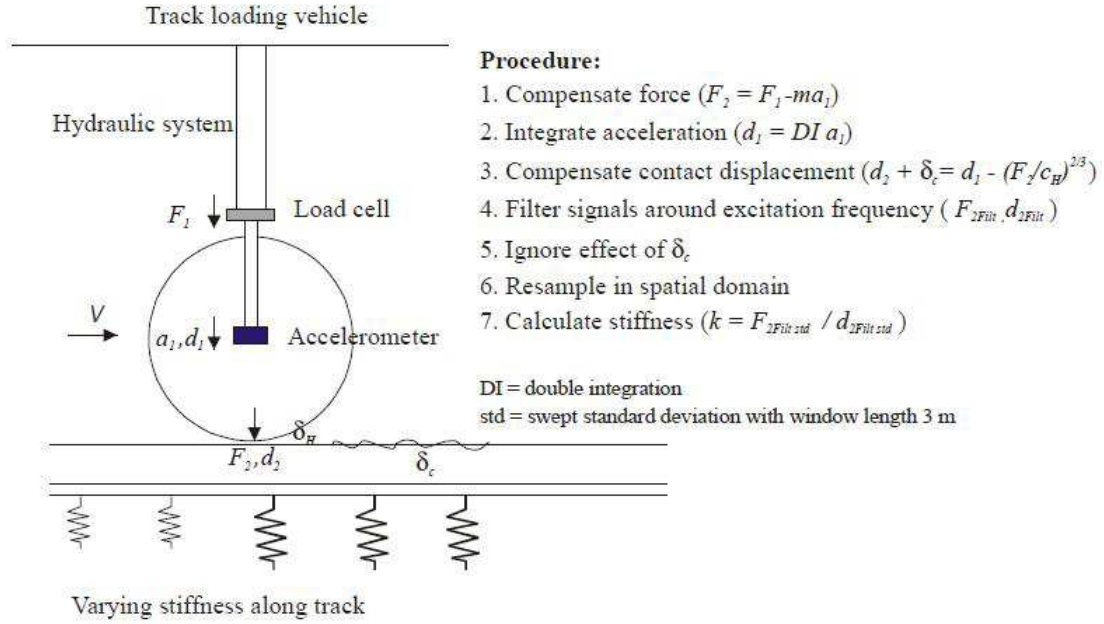


FIGURE 1.6: Principe de la méthode de mesure de rigidité de la voie par RSMV [13].

L'accélération mesurée  $a_1(t)$  doublement intégrée permet de retrouver la déflexion (Eq. 1.5). La roue de mesure est considérée comme rigide sauf pour les déflexions  $\delta_H$  dans la zone de contact même si leur influence sur le résultat est petite. Les défauts longitudinaux de la géométrie du rail  $\delta_c$  peuvent également être pris en compte (Eq. 1.6).

$$\ddot{d}_1(t) = a_1(t) \quad (1.5)$$

$$d_2(t) = d_1(t) - \delta_H(t) - \delta_c(t) \quad (1.6)$$

La déflexion dans la zone de contact est obtenue à l'aide d'un modèle de contact de Hertz et peut être calculée à partir de :

$$F_2(t) = c_H \delta_H(t)^{3/2} \quad (1.7)$$

où  $c_H$  est une constante dépendant des rayons des corps en contact, des modules d'Young et des coefficients de Poisson des corps. Dans le cas du RSMV,  $c_H$  vaut  $92,7 \text{ GN/m}^{3/2}$ .

### Paramètres de fonctionnement

La charge axiale statique est de 180 kN et l'amplitude maximale de la charge dynamique est de 60 kN. Le RSMV évalue la rigidité dynamique avec une fréquence d'excitation allant jusqu'à 50 Hz. Il est possible d'effectuer :

- des mesures globales de raideur à des vitesses élevées (jusqu'à 60 km/h) via des excitations sinusoïdales à des fréquences simultanées (jusqu'à 3),
- des investigations détaillées à petite vitesse (inférieure à 10 km/h).

Le choix de la fréquence d'excitation nécessite quelques précautions :

- la combinaison de la fréquence d'excitation et de la vitesse de passage du RSMV ne doit pas coïncider avec la fréquence de passage des traverses : en effet la fréquence de passage des traverses pourrait influencer les accéléromètres ce qui dégraderait la qualité des résultats,
- la longueur d'onde des défauts de voie correspondant à la combinaison fréquence-vitesse doit être évitée.

Dans les mesures réalisées, les fréquences d'excitation ont été déterminées en divisant la fréquence de passage des traverses par 1,5 et 2,5. A une vitesse de passage de 40 km/h, les fréquences d'excitations sont de 6,8 et 11,4 Hz.

Cet outil permet d'évaluer une raideur de voie en continu à des fréquences différentes. Il est donc possible de distinguer les zones présentant des anomalies (problèmes de drainage par exemple). Toutefois cette mesure fournit une réponse globale de la structure ferroviaire mais ne permet pas d'obtenir les caractéristiques mécaniques et géométriques des différents composants de la voie.

### 1.3.3 Portancemètre ferroviaire

Se basant sur le succès du modèle routier du portancemètre considéré comme un outil efficace de caractérisation de la portance des chaussées, un modèle adapté au domaine ferroviaire est en cours de développement [48].

Le portancemètre mesure en continu le module des plates-formes ferroviaires ; son principe de fonctionnement est proche de celui du RSMV. Le balourd, mis en rotation par un moteur hydraulique, applique une charge dynamique sur la voie par l'intermédiaire d'une roue vibrante reliée par un système ressort-amortisseur (figure 1.7). Les charges verticales dynamiques sont appliquées par un vérin hydrodynamique dans la gamme de force de 10 à 75 kN et la plage de fréquence de 5 à 35 Hz.

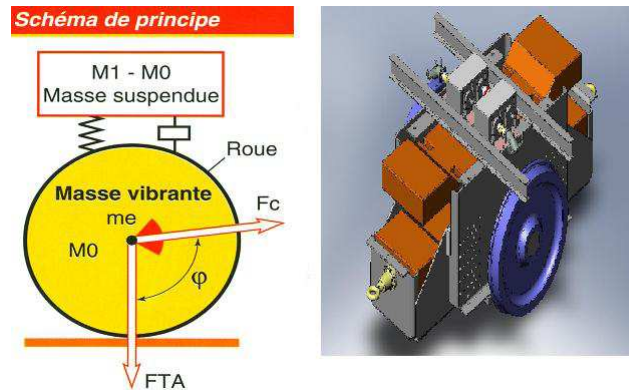


FIGURE 1.7: Principe de la méthode de mesure de rigidité de la voie par le portancemètre [49].

La rigidité verticale de la voie est définie dans le domaine temporel comme étant le rapport entre l'effort appliqué ( $F(t)$ ) et la déflexion engendrée ( $z(t)$ ) (partie linéaire) :

$$k(t) = \frac{F(t)}{z(t)} \quad (1.8)$$

Cette définition regroupe plusieurs types de rigidités : une rigidité tangente et une rigidité sécante pour les phases de chargement ainsi que pour la phase déchargement, ce qui amène à quatre types de définition de rigidités. Il est évident que divers composants de la voie ont plus ou moins un comportement non-linéaire, comme le sol ou les semelles sous-rail. Dans de nombreux cas, les traverses peuvent aussi avoir un contact non uniforme avec le ballast (cas des "traverses danseuses") ce qui mène à un tassement plus important sous l'effet de la charge. La rigidité qui est souvent utilisée pour éliminer le mauvais comportement en raison du contact, est la rigidité sécante calculée entre deux valeurs de force choisies relativement au maximum de la force appliquée (0,3 et 0,9  $\Delta F$  cf figure 1.8) :

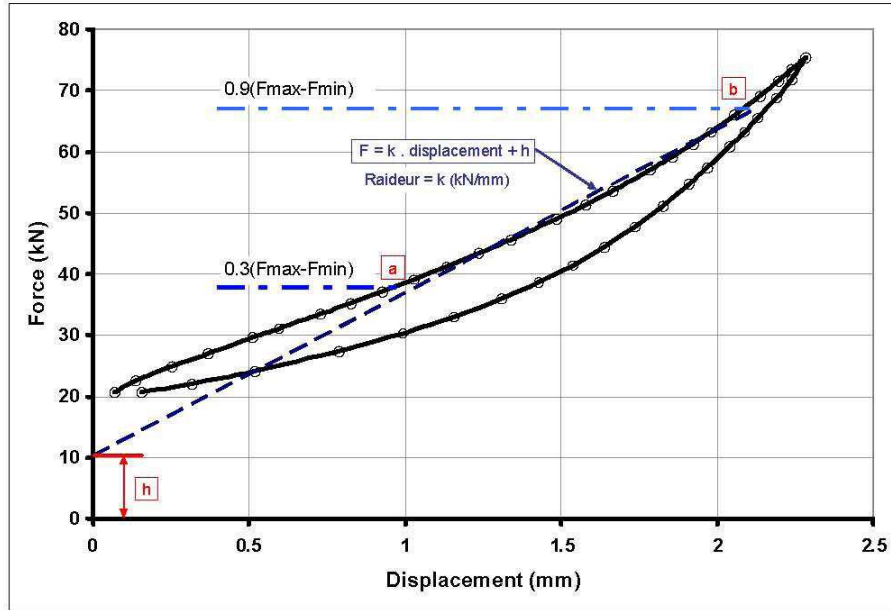


FIGURE 1.8: Principe de la méthode de mesure de rigidité de la voie par le portancemètre [48, 49]

$$k(t) = \frac{\delta F(t)}{\delta z(t)} = \frac{F_a(t) - F_b(t)}{z_a(t) - z_b(t)} \quad (1.9)$$

Le portancemètre ferroviaire est développé dans le cadre du projet Innotrack. Des tests de validation sont en cours; une comparaison avec les mesures RSMV sur des voies de service a été effectuée mais nous ne disposons pas pour l'instant des résultats.

### 1.3.4 Géoradar

La détection de la structure géométrique des sols est déterminante pour analyser l'origine des hétérogénéités du comportement d'un sol. Dans ce but a été développé le géoradar qui est constitué d'un émetteur qui envoie dans le sol une onde électromagnétique centrée sur un intervalle de fréquences variable. Les ondes introduites dans le sol sont soit absorbées par le matériau soit réfractées ou réfléchies. Quand les ondes réfléchies atteignent la surface, le signal radar est capté par l'antenne réceptrice, codé en valeurs numériques et enregistré [10]. Le récepteur est déplacé sur un profil le long duquel les impulsions sont envoyées sans interruption (figure 1.9).

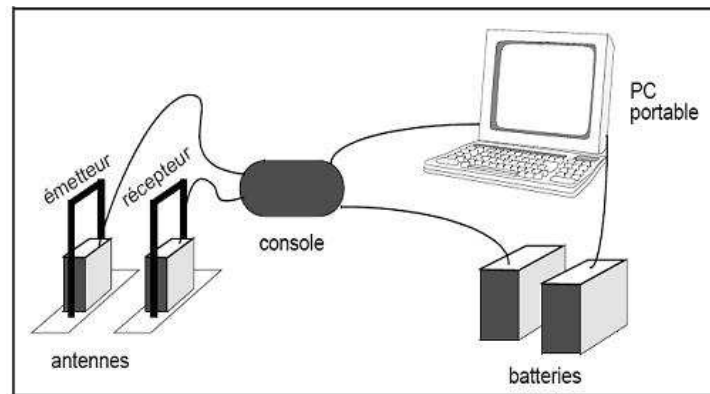


FIGURE 1.9: Présentation schématique d'un système géoradar.



## Modes de propagation des ondes radar

Une onde radar peut être schématisée par son rayon. Sous cette forme, l'application des lois de l'optique peut être facilement représentée, ce qui permet l'estimation des temps de trajet par de simples calculs géométriques. Les trois termes utilisés pour décrire les modes de propagation des ondes radar dans les matériaux sont les suivants (cf figure 1.10) :

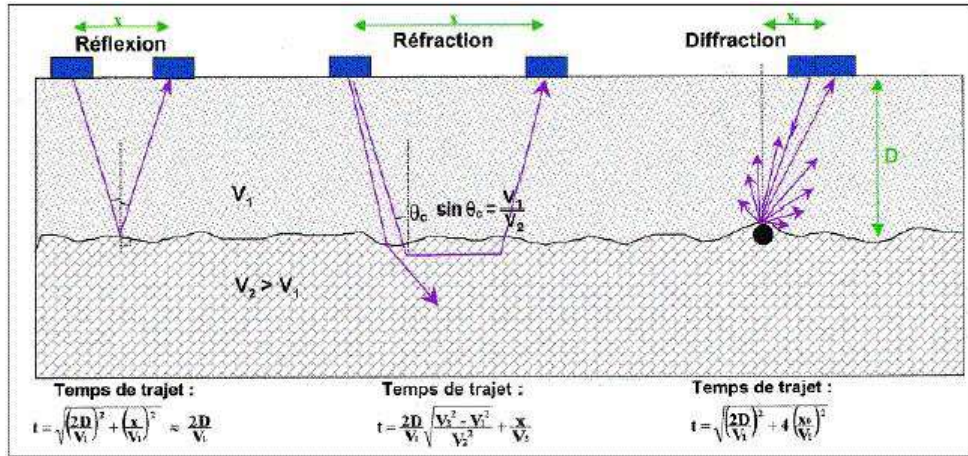


FIGURE 1.10: Les trois modes de propagation des ondes radar [34].

**Réflexion** : l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence. Dans la plupart des cas de mise en œuvre de géoradar, l'incidence est normale et l'amplitude du champ électrique réfléchi est égale à celle du champ incident multipliée par le coefficient de réflexion  $r$ . Ce coefficient est fonction du contraste diélectrique, comme le montre la figure 1.11.

**Réfraction** : ce terme peut désigner soit la déviation subie par le rayon incident lorsqu'il pénètre dans une couche sous-jacente, soit un trajet spécifique, guidé par l'interface entre deux couches, quand l'angle d'incidence atteint sa valeur maximale ou critique.

**Diffraction** : lorsqu'un objet réfléchissant isolé (une discontinuité) est présent dans la subsurface, l'énergie réfléchie est dispersée dans toutes les directions quel que soit l'angle d'incidence.

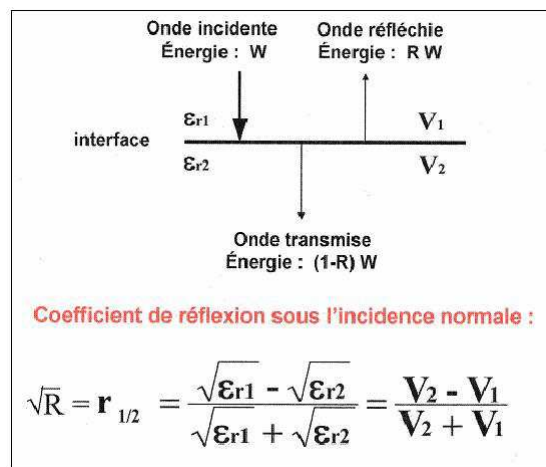


FIGURE 1.11: Coefficient de réflexion des ondes radar [34]

## Mode de représentation graphique des données

La figure 1.12 donne un exemple de représentation obtenue après traitement des données issues des mesures par géoradar. Sur ce type de représentation provenant d’une mesure sur une structure ferroviaire, on obtient des informations spatiales permettant de distinguer :

- l’épaisseur de la couche de ballast,
- l’épaisseur de la couche intermédiaire,
- une indication du degré de pollution du ballast.

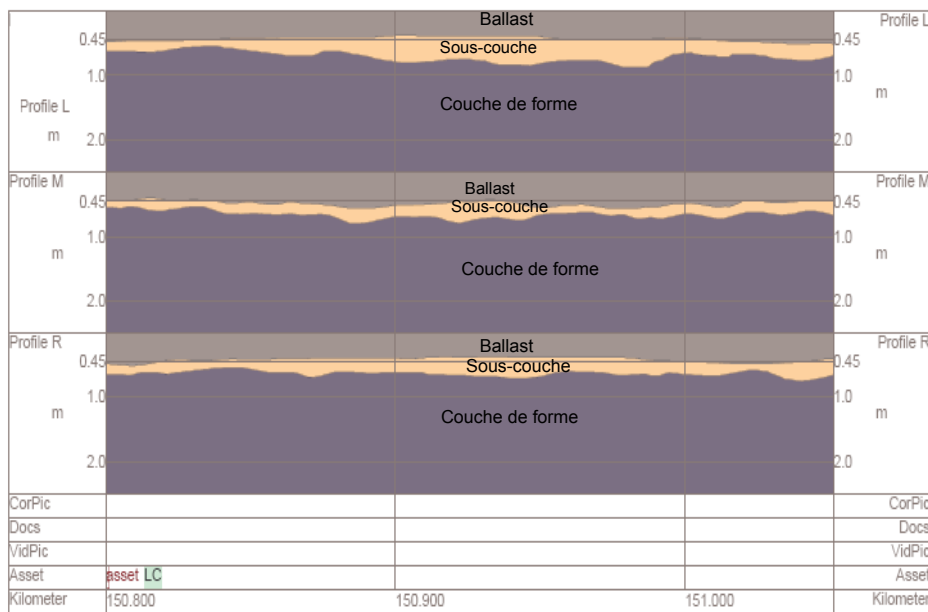


FIGURE 1.12: Exemple de représentation galvanométrique [34]

Il est important de préciser que l’obtention de ces épaisseurs nécessite un calage des mesures avec des essais complémentaires de type sondages ponctuels (pénétrométriques, endoscopiques ou carottage).

Les informations obtenues à l’aide de ce dispositif sont pertinentes pour l’évaluation des caractéristiques géométriques de la voie.

### 1.3.5 Pénétromètre dynamique

Le pénétromètre dynamique (DCP en anglais) est un outil très utile pour l’évaluation structurale des chaussées ou pour les études de contrôle de compactage et la reconnaissance des sols [17, 37, 57, 63]. En effet, le DCP est souvent utilisé en ingénierie pour évaluer les propriétés (épaisseur et nature) de chacune des couches de la structure du sol. En raison de sa simplicité, de sa portabilité, de son faible coût et de la possibilité qu’il offre d’obtenir des données permettant de déterminer rapidement des propriétés mécaniques in situ, le DCP est un outil largement utilisé, et ce, dans plusieurs pays.

Le Panda est un pénétromètre dynamique léger développé en France qui permet d’effectuer des mesures de reconnaissance du sol jusqu’à une profondeur de 5 m (figure 1.13), d’où l’intérêt de son utilisation dans l’auscultation des plates-formes ferroviaires.

Le principe de l’essai Panda consiste à enfoncer dans le sol, à coups de marteau, un train de tiges au bout duquel est vissée ou emboîtée une pointe, tout en réalisant des mesures automatiques. Pour chaque coup, un capteur mesure l’énergie de battage fournie par le marteau, un deuxième capteur mesure l’enfoncement du train de tiges.



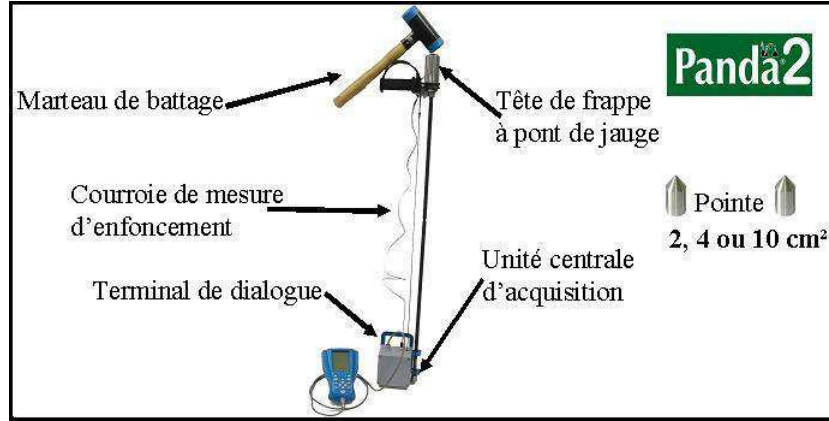


FIGURE 1.13: Principe de fonctionnement du Panda. [42]

À partir de ces deux mesures, la résistance dynamique de pointe est calculée en utilisant la formule des Hollandais [111, 42] :

$$q_d = \frac{1}{2} m V^2 \frac{1}{Ae} \frac{m}{m + m'} \quad (1.10)$$

avec :

- $V$  la vitesse du marteau (m/s),
- $A$  la section de pointe (cm<sup>2</sup>),
- $e$  l'enfoncement du train de tiges (cm),
- $m$  la masse du mouton (kg),
- $m'$  la masse entraînée (tige + pointe) (kg).

Le Panda donne des valeurs qui ne sont pas régulièrement espacées car l'enfoncement dépend de deux paramètres non constants [22, 111] :

- la résistance du sol,
- l'énergie apportée par l'impact du marteau sur le train de tige.

Il existe des corrélations qui mettent en relation les indices de pénétration (DCPI) obtenus avec l'aide d'un DCP et certains paramètres couramment utilisés en conception de chaussées, tels que la valeur CBR et les modules de déformation élastiques, réversibles et rétro-calculés [17, 37, 57].

Même si l'étude des corrélations entre la résistance de pointe  $q_d$  mesurée avec le Panda et des paramètres tels que le CBR ou les modules n'ont pas fait l'objet de publications, des travaux de recherche de Buisson et de Sanglerat [87, 88, 89] ont mis en évidence le lien entre ces grandeurs à partir des essais DCP ou des essais CPT. C'est en s'appuyant sur ces travaux ainsi que sur ceux réalisés au LaMI depuis plusieurs années [26, 108, 12] que les corrélations entre  $q_d$  Panda et des grandeurs de mécanique des sols ont été développées.

Connaissant les caractéristiques physiques des matériaux et en se basant sur la résistance de pointe  $q_d$ , il est possible au moyen d'une courbe de calibration préalablement réalisée, d'estimer la densité *in situ* du matériau granulaire [26].

Cependant, le test de pénétration est un essai "sans visibilité" et la caractérisation des matériaux granulaires rend nécessaire une identification géotechnique. Cette identification est désormais possible en couplant l'essai pénétrométrique à la géoendoscopie, en exploitant la cavité créée pendant l'essai de pénétration.

### 1.3.6 Essais géo-endoscopiques

La géo-endoscopie consiste à faire des enregistrements d'images à l'aide d'un endoscope (de 8 mm de diamètre), le long d'un tube présentant une ouverture latérale (figure 1.14). Une cavité doit être préalablement réalisée, généralement celle de l'essai pénétrométrique ou de tout autre essai de forage. Une analyse automatique des images enregistrées permet de caractériser les différentes couches du terrain. Le recours à l'expertise est très important dans cette analyse par l'examen des couleurs et de la texture.

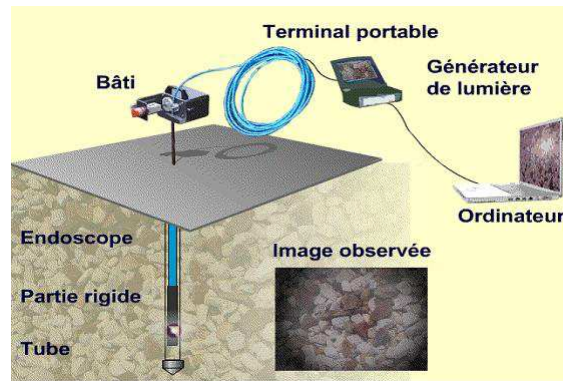


FIGURE 1.14: Principe du géo-endoscope [22].

L'analyse des images enregistrées par le géo-endoscope repose sur l'observation et le traitement de différents paramètres que sont la granulométrie, la texture et la colorimétrie. Dans le cadre de la problématique des plates-formes ferroviaires, nous nous orienterons vers une analyse d'images globale, à savoir portant sur la colorimétrie et la texture [22].

#### a) Caractérisation de la texture

L'analyse de la texture permet de révéler et de discerner les différents types de matériaux, non pas suivant leur granulométrie mais suivant leur aspect. Chaque sol a une texture propre, ce qui permet de les distinguer entre eux selon des approches statistiques ou spectrales [22].

#### b) La démarche générale

En combinant les paramètres provenant de l'analyse spectrale ( $M_3$ ) et de l'analyse statistique (écart type et coefficient de variation de l'histogramme en niveaux de gris), une méthode d'analyse de texture a été mise au point permettant de classer les matériaux. Le cheminement de cette analyse de texture est décrit sur la figure 1.15.

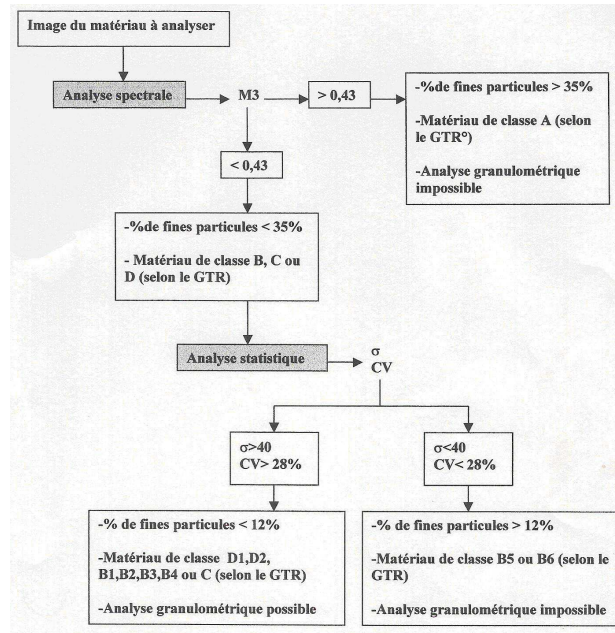


FIGURE 1.15: Démarche complète de l'analyse de texture [22]

### 1.3.7 Couplage Panda géo-endoscopie

Les deux techniques précédemment décrites sont utilisées afin de déterminer les épaisseurs ainsi que les modules des différentes couches aux points de mesure. L'analyse des enregistrements du géo-endoscope permet la délimitation des différentes couches, ce qui permet la détermination des épaisseurs de celles-ci comme le montre un exemple sur la figure 1.16 [99]. Une fois les couches reconnues, nous procédons à un calcul, par couche et par point de sondage, de la moyenne de l'ensemble des enregistrements des résistances aux points mesurés  $q_d$  sur le pénétrogramme. Nous ferons par la suite l'hypothèse que la résistance de pointe est constante au sein d'une même couche et de valeur égale à  $q_{d_{moy}}$ .

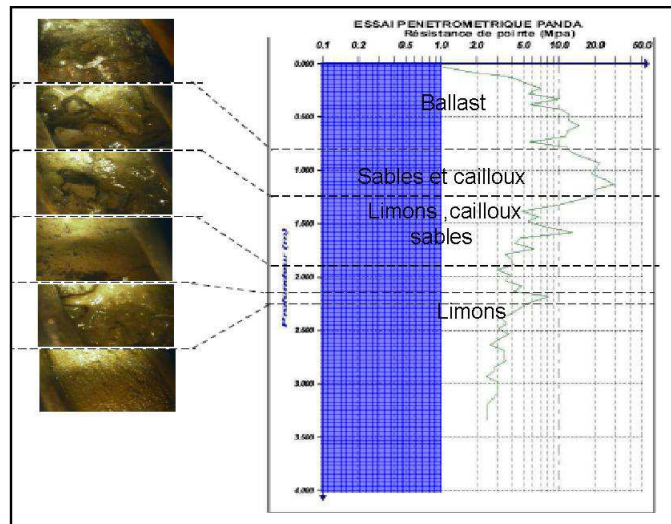


FIGURE 1.16: Couplage géo-endoscope Panda [99]

## Module de déformation du sol et terme de pointe

L'essai de pénétration statique étant l'un des essais *in situ* les plus anciens et les plus répandus, nombreux sont les chercheurs qui, depuis longtemps, ont essayé de relier, soit théoriquement, soit statistiquement, le terme de pointe aux modules de déformation usuels (œdométrique, pressiométrique ou élastique) ou au coefficient de compressibilité à l'œdomètre. On a beaucoup critiqué ces tentatives qui essayent de relier entre eux deux phénomènes apparemment différents que sont la rupture et les faibles voire très faibles déformations.

Dès 1940, Buisman a cherché à relier le terme de pointe du pénétromètre statique au module de déformation à l'œdomètre ( $E_{oed}$ ). Pour un sol dont la nature est identifiée, on peut écrire :

$$E_{oed} = \alpha q_c \quad (1.11)$$

Le coefficient  $\alpha$ , donné initialement égal à 1,5 par Buisman, a été réévalué en fonction de la nature des sols. Bachelier et Parez (1965) ont cherché à améliorer la formule précédente par une vaste campagne expérimentale *in situ*. Mais c'est surtout Sanglerat [87, 88, 89] qui a contribué au développement de cette recherche. Nous reprenons dans le tableau 1.1 les valeurs du coefficient préconisées par les auteurs précédemment cités, présentées par Arbaoui [4].

D'autres auteurs proposent pour le coefficient  $\alpha$  les valeurs du tableau 1.2 (Barata, 1995).

Sols		Sables	Sables argileux	Argiles compactes	Argiles molles	Limons argileux	Limons	Tourbes	Marnes
Sanglerat	$\alpha$	1,5	2..5	2 ..5	5..10	-	1..2	0,4..1	2..6
	$q_c$	-	1,5..3	1,5..3	<1	-	-	-	-
Bachelier et Parez	$\alpha$	1..2	2..4	3..5	-	2,5..4	-	0,7..0,8	3..5
	$q_c$	-	-	-	-	-	-	-	-

TABLE 1.1: Coefficient de Buisman d'après Sanglerat, Bachelier et Parez [4, 77]

Sols	Limons sableux	Sables limoneux	Limons argileux	Argiles sableuse	Limons argileux compact	Argile	Argile compacté	Argile limono- sableuse
$\alpha$	1,15	1,2	2,4	2,8 à 3,6	3	3,4	4,4	5,2
source	Barata (1962)			Jardin	De Mello et al	Barata	Barata	Jardin

TABLE 1.2: Coefficient de Buisman selon d'autres sources

Nous utiliserons dans la suite les coefficients de Buisman afin de retrouver les modules œdométriques des différentes couches. Cependant la résistance de pointe utilisée par Buisman pour la détermination du module de déformation est la résistance statique  $q_c$ . En prenant l'hypothèse d'égalité entre la résistance de pointe dynamique et la résistance statique pour le pénétromètre Panda ( $q_d = q_c$ ), nous pouvons ainsi décrire le module de déformation œdométrique du sol en fonction de la résistance de pointe dynamique via l'approximation suivante :

$$E_{oed} = \alpha q_d \quad (1.12)$$

Cette hypothèse reste réaliste dans la majorité des sols comme l'ont montré Zhou [111] et Chaigneau [26].

Par la suite, on peut donc relier le module œdométrique au module élastique ( $E$ ) par la relation suivante :

$$E = E_{oed} \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \quad (1.13)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson pris égal à 0,3.

## Conclusion

Nous avons présenté quelques outils et techniques actuels d'auscultation des voies ferrées. L'objectif de ce travail est de prendre en compte la variabilité des caractéristiques mécaniques (modules d'élasticité des différentes couches) et géométriques (épaisseurs) dans un modèle numérique représentatif d'une portion de voie. Il est donc important dans ce type d'analyse d'obtenir au moins les caractéristiques statistiques du premier et second ordre de ces quantités pour chaque constituant.

Les outils de diagnostic de la voie présentés permettent l'évaluation de l'état de dégradation de la voie ferrée. Les outils de mesures en continu ont un grand intérêt vu leur rapidité par rapport aux mesures ponctuelles et surtout par le fait qu'ils ne nécessitent pas l'interruption du trafic. Cependant ces outils sont basés sur l'interprétation de la réponse de la voie, déflexion pour le Mauzin ou accélération pour le RSMV, ce qui ne permet pas de remonter à l'origine des désordres et de coupler les effets de chaque constituant de la voie. Le géoradar permet d'apporter des informations supplémentaires (épaisseur des couches) permettant d'interpréter le comportement de la voie mais nécessite un calage à partir de sondages ponctuels.

Les mesures ponctuelles basées sur le couplage Panda-géoendoscopie permettent d'estimer les caractéristiques mécaniques et géométriques des composants de la plate-forme ferroviaire. Le nombre de sondages pour une portion de voie donnée est limité par la disponibilité de l'infrastructure, la durée des essais et le coût, ce qui a une influence sur la représentativité de l'échantillon de mesures. Néanmoins, du fait de leur facilité d'implantation et de mise en œuvre, ces essais peuvent être multipliés, permettant ainsi d'alimenter de façon raisonnable l'échantillonnage statistique des mesures expérimentales.

Dans le but de prendre en compte la variabilité qui entache les caractéristiques de la voie ferrée, nous choisissons d'utiliser comme données d'entrée des mesures réalisées en utilisant le couplage Panda-géoendoscope. Nous nous intéressons dans un premier temps à la description statistique de cette variabilité et nous analysons ensuite cette variabilité pour différents sites.

## 1.4 Présentation des sites de mesures

Afin de comparer la variabilité des caractéristiques des plates-formes ferroviaires sur plusieurs sites, nous avons appliqué la méthodologie présentée dans la section précédente à des sites ayant des caractéristiques différentes (structures, historiques et types de trafic : tonnages et vitesses) afin de décrire la variabilité de leurs caractéristiques en conditions réelles. Les statistiques sont basées sur les résultats des mesures Panda-géoendoscope disponibles sur les quatre sites de mesures : deux sites de type voie classique (Riom et Chambéry) et deux sites de type LGV (Laroche sur la ligne Paris-Lyon et Melun). Nous donnons dans la suite une brève description de ces différents sites.

### 1.4.1 Site de Riom

Le site de Riom se situe sur la ligne classique Clermont-Ferrand - Paris, plus précisément entre les gares de Riom et de Gerzat (entre les points kilométriques (PK) 406+700 et 411+400). Les investigations ont été effectuées sur une portion de voie de 5,30 km, au niveau de la voie V2 (voie de service).

Les mesures Panda et géo-endoscopiques ont été effectuées début 2006 avec au total 16 sondages. La structure générale rencontrée sur le site de Riom est composée de quatre couches (figure 1.17) :

- couche de ballast sain et pollué par les remontées des fines de la plate-forme ;
- couche intermédiaire, composée essentiellement de grave concassée et sable grossier compacté ;
- sous-couche composée de sable grossier et/ou d'argile - sable grossier compacté ;
- couche de forme composée d'argile - sable grossier compacté.

La couche de ballast pollué et la couche intermédiaire peuvent être confondues.

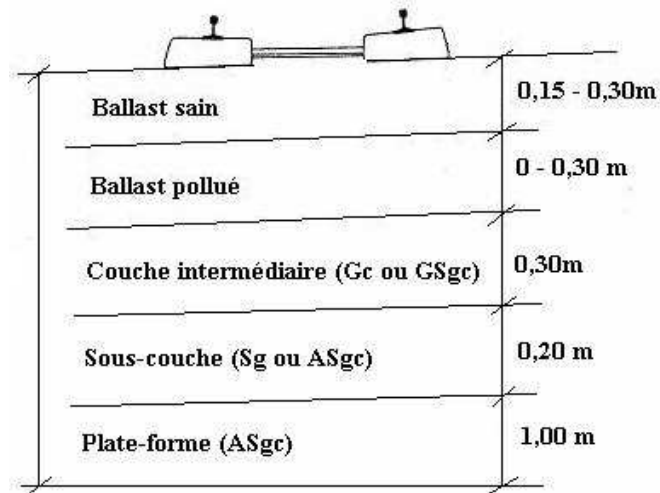


FIGURE 1.17: Structure générale du site de Riom.

Cette ligne n'est pas importante du point de vue du trafic ferroviaire : quelques dizaines de trains fret (22 tonnes/essieu) et trains passager (18 tonnes/essieu) par jour. Le tronçon investigué est situé au niveau d'une gare où la vitesse est limitée à 80 km/h.

#### 1.4.2 Site de Laroche

La partie concernée par cette étude se trouve sur la ligne grande vitesse LN1 Paris/Sud Est voie V1 et V2 dans le secteur de Laroche du PK 82+000 au PK 88+000. Les données sur lesquelles s'appuie cette étude sont issues des résultats des 245 sondages pénétrométriques de type Panda et géo-endoscopiques.

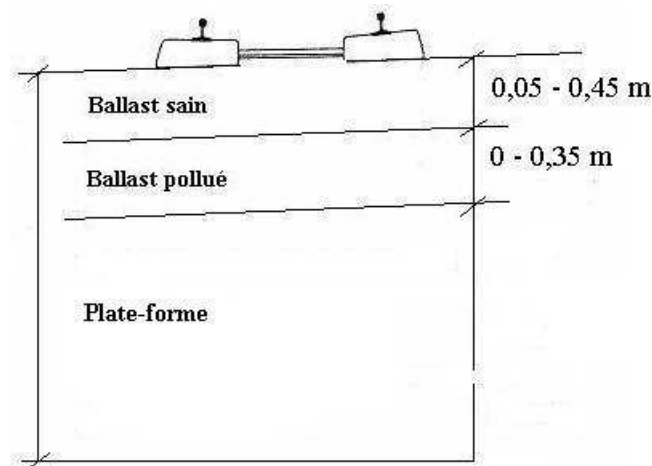


FIGURE 1.18: Structure générale du site de Laroche.

Le maillage des sondages varie entre 90 et 120 m, et les profondeurs atteintes vont de 0,70 à 1 m : les données obtenues concernent donc la couche du ballast sain et pollué (figure 1.18).

La vitesse commerciale sur cette ligne, dédiée uniquement à des rames TGV, est de 300 km/h. En pointe journalière, le débit maximum est de 12 trains par heure et par sens.

### 1.4.3 Site de Chambéry

Le site de mesure est situé entre la gare de Chambéry-Challes les Eaux et la gare de Saint Pierre d'Albigny (Savoie) et plus particulièrement entre le PK 151+100 et le PK 157+000. Le trafic sur cette ligne est essentiellement dédié aux trains de fret (entre 20182 à 26313 tonnes/jour) ; la vitesse est limitée à 160 km/h. Les mesures sur ce site entrent dans le cadre du projet Innotrack. Au total 45 sondages Panda dont 30 avec endoscopie ont été effectués. La structure de ce site (figure 1.19) est composée de quatre couches :

- couche de ballast ;
- sous-couche, composée de sables et cailloux ;
- couche de forme, composée d'un mélange de limons et graves ;
- couche du sol support, composée de limons.

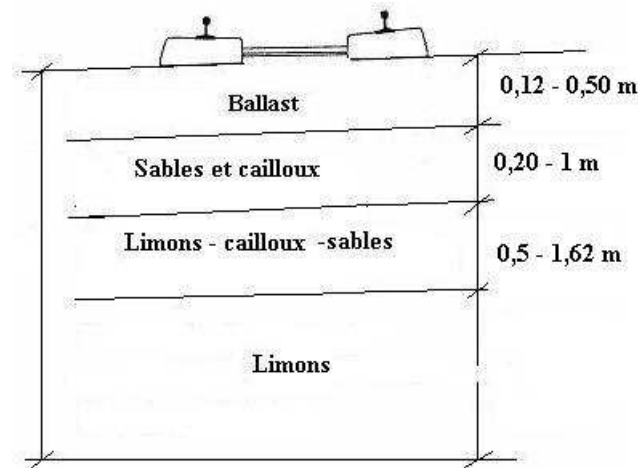


FIGURE 1.19: Structure générale du site de Chambéry.

Sur la figure 1.20, nous présentons les résultats des mesures de NL lors de la tournée Mauzin sur le site de Chambéry (juin 2007). On peut remarquer le nombre important de sections (tranches de 200 m) où le NL dépasse le seuil maximal (1 cm) au delà duquel des opérations de maintenances sont nécessaires.

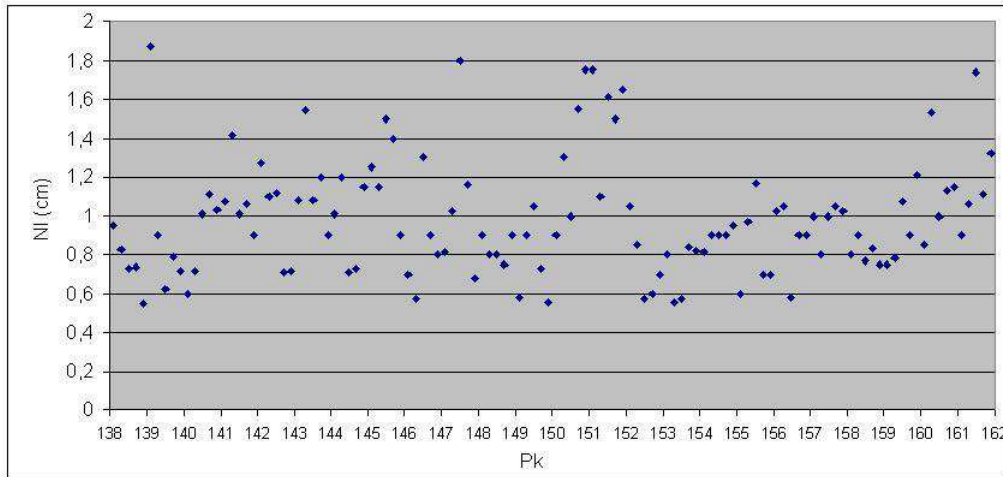


FIGURE 1.20: Valeurs du NL pour le site de Chambéry (tournée de juin 2007)

#### 1.4.4 Site de Melun

Dans le cadre de la préparation des opérations de maintenance (RVB) sur la LGV Paris-Lyon, des mesures Panda et géo-endoscopie ont été effectuées au mois d'août 2008 au niveau de la ville de Melun entre les PK 31+700 et 42+700. Au total 43 sondages avec un maillage irrégulier ont été effectués. Les sondages ont concernés trois couches : ballast sain, ballast pollué et sous-couche (cf figure 1.21).

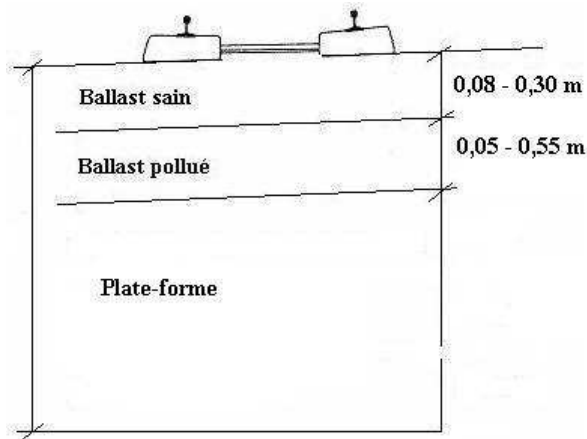


FIGURE 1.21: Structure générale du site de Melun.

#### 1.4.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté les quatre sites de mesures pour lesquels nous disposons d'échantillons de mesures Panda-géoendoscopie. Nous procédons dans ce qui suit au traitement statistique des différents échantillons.

### 1.5 Analyse statistique des mesures

Dans le domaine ferroviaire, les problèmes de variabilité des caractéristiques de voie sont très présents. Cette variabilité est due tout d'abord à la variabilité naturelle du sol support ainsi qu'à l'environnement (aux mauvaises conditions de drainage), mais aussi au vieillissement de certaines portions



et à la non-homogénéité des composants de la superstructure et de l'infrastructure, du fait des conditions de pose ou des modifications partielles réalisées lors des interventions de maintenance.

Dans le cadre de notre analyse, nous nous intéressons à la variabilité des caractéristiques de la plate-forme ferroviaire (infrastructure de la voie). L'analyse de cette variabilité est rendue possible grâce aux diverses mesures effectuées dans le cadre du projet Innotrack et présentées dans la partie précédente. En particulier, on se base sur les résultats des mesures *in situ* afin de déterminer la variabilité des épaisseurs et des modules de déformation des différentes couches de la plate-forme ferroviaire.

Plusieurs approches ont été proposées afin de caractériser la variabilité spatiale d'une propriété mesurée en un grand nombre de points de l'espace, citons entre autres :

- la caractérisation par des variables aléatoires (v.a.) : cette approche, souvent considérée comme classique, permet de caractériser le paramètre étudié par une distribution statistique ;
- la caractérisation par des processus ou champs aléatoires : elle fait appel aux méthodes géostatistiques permettant l'agencement spatial de la dispersion moyennant des fonctions aléatoires (ou processus stochastiques) [39]. La méthode de krigeage [68] est très répandue en géotechnique [7, 30].

Dans notre analyse statistique des paramètres de la voie ferrée, nous nous intéressons au premier type de traitement. Ce choix est lié au choix de la modélisation par la méthode des éléments finis de la voie ferrée, pour laquelle les paramètres aléatoires sont modélisés par des variables aléatoires.

Cette analyse repose sur l'estimation des différents moments statistiques (moyenne (1.14), variance (1.15)) et de la loi de distribution d'un échantillon de v.a.  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ . Les estimateurs de la moyenne ( $\hat{m}_X$ ) et de la variance ( $\hat{\sigma}_X^2$ ) s'écrivent :

$$\hat{m}_X = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k \quad (1.14)$$

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (X_k - m_X)^2 \quad (1.15)$$

Les estimées de la moyenne et de la variance sont alors obtenues à partir d'une réalisation  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  (échantillon numérique) de  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  par les relations suivantes :

$$\mu_X = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (1.16)$$

$$s_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \mu_X)^2 \quad (1.17)$$

La dispersion d'échantillonnage est quantifiée par le coefficient de variation ( $C\hat{V}_X = \hat{\sigma}_X / \hat{m}_X$ ) dont une estimée est donnée par :

$$cv_X = \frac{s_X}{\mu_X} \quad (1.18)$$

Une dispersion importante est caractérisée par un coefficient de variation important. En ce qui concerne les paramètres de sol, plusieurs auteurs (dont Morse [72] et Magnan [64]) ont souligné la difficulté d'estimer leur variabilité car :

- les sols ne constituent pas des unités statistiquement homogènes [72] : en effet, les caractéristiques des sols présentent une forte variabilité au sein de la même couche,

- l'échantillonnage n'est pas toujours réalisé au même moment pour les échantillons d'un même site, ce qui accentue la dispersion des valeurs (variation saisonnière de la teneur en eau par exemple),
- la variabilité mesurée ne reflète pas uniquement la variabilité intrinsèque des caractéristiques des sols mais également l'erreur due aux outils de mesure.

Il est donc difficile en géotechnique de retenir des valeurs universelles pour la dispersion d'une propriété donnée [50]. Elkateb et al. [35] soulignent la difficulté de décrire la distribution statistique des paramètres d'un site, de manière similaire à la dispersion. Cette dispersion est spécifique au site et au paramètre mesuré. Magnan & Bagheri [65] signalent que les propriétés géotechniques peuvent le plus souvent être décrites par les lois normales, lognormales, Weibull et bêta, quelle que soit la propriété étudiée.

Afin de décrire la variabilité des caractéristiques de tronçons de voies ferrées, nous adapterons la stratégie suivante pour déterminer les lois de distribution pour chaque composant de la structure ferroviaire :

1. estimation des différents moments statistiques,
2. analyse de l'homogénéité des échantillons recueillis par le test de  $\chi^2$ ,
3. analyse d'adéquation à des lois théoriques des différents échantillons en utilisant les tests de  $\chi^2$  et Kolmogorov-Smirnov,
4. analyse de corrélations entre différents paramètres mesurés.

Les tests d'homogénéité ont pour but de vérifier si deux échantillons de même effectif dérivent de la même loi de probabilité.

### 1.5.1 Estimation des moments statistiques

Dans ce paragraphe, nous donnons les estimations des moments statistiques établies à partir des données expérimentales recueillies sur les quatre sites présentés dans la partie 1.4 et ce pour les différentes couches composant la plate-forme de la voie. Nous donnerons aussi pour chaque estimation de la moyenne un intervalle de confiance (IC) avec un risque d'erreur ( $\alpha$ ) de 5%. La notion d'intervalle de confiance est présentée en annexe C.

#### Site de Riom

Couche	$q_{d_{moy}}$ [MPa]		Épaisseur [cm]	
	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type
Ballast	4,3 [ 2,7 ; 5,9]	3	24 [22,5 ; 25,4]	2,7
Couche-intermédiaire	14,8 [ 12,8 ; 16,9]	3,85	54 [48,2 ; 59,3]	10,45
Sous-couche	5,9 [ 4,9 ; 6,9]	1,8	42 [29,3 ; 54,6]	23
Couche de forme	6,6 [ 5,6 ; 7,6]	1,3	–	–

TABLE 1.3: Statistiques des mesures pour le site de Riom.

Sur la base des résultats présentés dans le tableau 1.3, nous pouvons faire les remarques suivantes :

- la couche intermédiaire a en moyenne une résistance de pointe trois fois supérieure aux autres couches ; ceci est dû au fait que cette couche est composée d'un mélange de grains de ballast, de sable ainsi que de fines lui conférant un indice des vides plus faible que les autres couches et donc une densité plus élevée. En présence d'eau, ils constituent un "ciment" naturel solidifiant ces différents composants. Par cette spécificité, elle joue un rôle dans la capacité portante de la voie,
- les trois couches supérieures présentent une forte variabilité, en particulier la couche de ballast avec un coefficient de variation supérieur à 60 %.

*Remarque* : l'épaisseur de la couche de forme obtenue à partir des essais Panda ne correspond pas à l'épaisseur réelle de la couche mais à la profondeur maximale atteinte par le Panda, ce qui explique qu'elle ne figure pas dans le tableau 1.3.

### Site de Laroche

Couche	$q_{d_{moy}}$ [MPa]		Épaisseur [cm]	
	Moyenne	Écart-type	Moyenne	Écart-type
Ballast sain	27,9 [ 26,7 ; 29,2]	4,65	20,2 [19,6 ; 20,7]	4,2
Ballast pollué	62,3 [ 60,0 ; 64,6]	20,6	25,2 [24,2 ; 26,3]	7,1

TABLE 1.4: Statistiques des mesures pour le site de Laroche.

Sur la base des résultats présentés dans le tableau 1.4, calculés à partir des 245 sondages, nous pouvons faire les remarques suivantes :

- la couche de ballast pollué présente une moyenne de la résistance de pointe deux fois supérieure à celle du ballast sain : il est donc important de distinguer ces deux couches ;
- les épaisseurs présentent une homogénéité exprimée par de faibles coefficients de variation, ce qui peut être considéré comme une qualité vis-à-vis du confort lié au comportement global de la voie.

### Site de Chambéry

Couche	$q_{d_{moy}}$ [MPa]		Épaisseur [cm]	
	Moyenne	Écart type	Moyenne	Écart type
Ballast (12 sondages)	11,1 [9,2 ; 12,9]	3,2	26,5 [19,7 ; 33,2]	11,7
Sous-couche (12 sondages)	15,6 [10,4 ; 20,9]	12,1	64,4 [54,3 ; 74,1]	25,6
Couche de forme (45 sondages)	7,5 [6,2 ; 8,7]	4,1	117,3 [98,6 ; 136,1]	59,4
Sol naturel (45 sondages)	6,3 [4,9 ; 7,7]	4,5	—	—

TABLE 1.5: Statistiques des mesures pour le site de Chambéry.

Sur le site de Chambéry (tableau 1.5) nous remarquons que :

- les différentes couches de ce site et en particulier la sous-couche (sables cailloutis), présentent une importante variabilité au niveau de la résistance de pointe (supérieure à 80 %),
- les épaisseurs présentent une forte variabilité, exprimée par des coefficients de variations largement supérieurs à 30 %.

Ces résultats peuvent être mis en parallèle avec les observations sur l'indicateur de dégradation géométrique dépassant fréquemment le seuil de 1 (cf figure 1.20).

### Site de Melun

Les résultats obtenus, calculés à partir des 70 sondages, sont rassemblés dans le tableau 1.6.

Couche	$q_{d_{moy}}$ [MPa]		Épaisseur [cm]	
	Moyenne	Écart type	Moyenne	Écart type
Ballast sain	7,9 [ 14,0 ; 21,1]	5	17,5 6,3 ; 9,4]	11,5
Ballast pollué	34,0 [30,8 ; 37,3]	10,5	22,3 [19,0 ; 25,9]	10,5
Sous-couche	37,3 [33,8 ; 40,8]	11,4	–	–

TABLE 1.6: Statistiques des mesures pour le site de Melun.

Sur ce site, nous remarquons :

- une variation croissante de la variabilité qui augmente avec la profondeur,
- la faible valeur de la moyenne de la résistance de pointe de la couche du ballast sain (7,92 MPa) avec un coefficient de variation assez important.

### Conclusion

Nous avons présenté dans ce paragraphe les différents sites de mesures ainsi que les statistiques sur les épaisseurs et les moyennes, par couche, des résistances de pointes  $q_d$  des différentes composants de la structure de voie de chaque site.

Pour les différents sites examinés, nous remarquons que la couche intermédiaire présente des caractéristiques mécaniques (résistance de pointe) nettement supérieures aux autres couches, ce qui met en évidence l'importance de cette couche dans le comportement global de la structure. L'analyse des différents sites permet dans certains cas de relier quantitativement l'indice de dégradation géométrique de la voie à la variabilité évaluée.

Les quatre sites analysés présentent des caractéristiques différentes, et notamment pour la couche de ballast et la couche intermédiaire. Le site de Laroche (ligne LGV) présente une faible variation de l'épaisseur de la couche de ballast comparée aux autres sites ainsi qu'une meilleure résistance avec une faible variation. Ceci est dû à l'importance du trafic sur cette ligne, contrairement au site de Riom (ligne classique avec un faible trafic) ou au site de Melun (ligne LGV en fin de cycle de vie), qui présentent de faibles résistances et une forte variabilité de leurs caractéristiques mécaniques et géométriques. Le site de Chambéry présente des caractéristiques moyennes comparées aux autres sites avec une dispersion importante traduisant l'hétérogénéité de ce site.

Après avoir calculé les différents moments statistiques, il est important de déterminer les lois de distributions des échantillons afin de caractériser la variabilité du terrain. Ceci est mis en œuvre moyennant des tests d'homogénéité et d'adéquation à des lois théoriques.

### 1.5.2 Tests d'homogénéité

#### Principe du test

Il s'agit de vérifier si deux échantillons de même effectif dérivent de la même loi de probabilité. Le test de  $\chi^2$ , présenté en annexe A, est utilisé de la même façon que pour vérifier l'adéquation à une loi de probabilité tout en remplaçant les termes relatifs à ce dernier ( $np_i$ ) par les effectifs relatifs à la seconde liste ( $n'_i$ ). Le  $\chi^2$  est donné par  $\sum_{i=1}^m \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ .

Afin de tester l'homogénéité des échantillons, nous procédons tout d'abord à un tirage au hasard de deux sous-échantillons de même taille ( $\geq 30$ ). Puis nous calculons le  $\chi^2$  que nous comparons ensuite à un seuil de signification fixé à 5 %.

#### Résultats de l'analyse d'homogénéité

Nous donnons dans ce qui suit les résultats du test d'homogénéité pour les différents sites de mesures. Il est à signaler ici que ce test est effectué sur les échantillons dont la taille est supérieure à 30 (tableaux 1.7, 1.8 et 1.9). C'est pourquoi les mesures sur le site de Riom n'ont pas été exploitées ainsi que les caractéristiques de la couche de ballast et de la sous-couche du site de Chambéry.

Paramètre	Résultat
épaisseur ballast sain	échantillon non homogène
$q_d$ ballast sain	échantillon homogène
épaisseur ballast pollué	échantillon homogène
$q_d$ ballast pollué	échantillon homogène

TABLE 1.7: Résultats des tests d'homogénéité sur Laroche.

Paramètre	Résultat
épaisseur couche de forme	échantillon homogène
$q_d$ couche de forme	échantillon non homogène
$q_d$ couche de Limons	échantillon non homogène

TABLE 1.8: Résultats des tests d'homogénéité sur le site de Chambéry.

Paramètre	Résultat
épaisseur ballast sain	échantillon non homogène
$q_d$ ballast sain	échantillon homogène
épaisseur ballast pollué	échantillon homogène
$q_d$ ballast pollué	échantillon homogène
$q_d$ sous-couche	échantillon homogène

TABLE 1.9: Résultats des tests d'homogénéité sur le site de Melun.

Les échantillons dont le test a montré l'homogénéité, sont considérés comme représentatifs du terrain. La non homogénéité constatée sur certains échantillons, peut être due à la dépendance des mesures à des paramètres mal maîtrisés (présence d'eau par exemple) et à la localisation des sondages qui sont

espacés, dans certains cas, d'une centaine de mètres. Le raffinement du maillage et l'augmentation de la taille de l'échantillon ainsi que la prise en compte des caractéristiques mécaniques et hydriques des matériaux peuvent permettre de distinguer les zones ayant des caractéristiques différentes et par suite, d'avoir un échantillon homogène représentant la réalité du terrain.

### 1.5.3 Tests d'adéquation

Nous donnons dans cette partie les résultats des tests d'adéquation (ou d'ajustement) des échantillons recueillis sur les différents sites en utilisant les test de  $\chi^2$  et celui de Kolmogorov-Smirnov (K-S) avec un seuil de signification de 5 %. Nous testons l'adéquation à la loi normale et la loi lognormale (tableaux 1.10 à 1.13). Les histogrammes des paramètres mesurés sont donnés sur les figures 1.22 à 1.24.

Il est à noter que, pour chaque type de loi, nous procédons à une transformation permettant de nous ramener à une variable gaussienne standard  $Y \sim N(0,1)$  en utilisant les transformations suivantes :

Cas de loi lognormale :

Soit  $X$  une v.a. lognormale de moyenne  $m_X$  et de variance  $\sigma_X^2$  :  $X \sim LN(m_X, \sigma_X^2)$ . On a alors l'égalité en loi :

$$Y = \frac{\ln X - m}{\sigma} \quad (1.19)$$

avec :

$$m = \ln\left(\frac{m_X}{\sqrt{1 + v_X^2}}\right) \quad ; \quad \sigma = \sqrt{\ln(1 + v_X^2)} \quad ; \quad v_X = \frac{\sigma_X}{m_X} \quad (1.20)$$

Cas de loi normale :

Soit  $X$  une v.a. normale de moyenne  $m_X$  et de variance  $\sigma_X^2$  :  $X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$ . On a alors l'égalité en loi :

$$Y = \frac{X - m_X}{\sigma_X} \quad (1.21)$$

couche	paramètre	loi normale		loi lognormale	
		K-S	$\chi^2$	K-S	$\chi^2$
ballast sain	Épaisseur	Non rejetée	Non rejetée	Rejetée	Rejetée
	$qd$	Rejetée	Rejetée	Non rejetée	Non rejetée
ballast pollué	Épaisseur	Rejetée	Rejetée	Non rejetée	Non rejetée
	$qd$	Non rejetée	Non rejetée	Rejetée	Rejetée

TABLE 1.10: Tests d'ajustement des paramètres du site de Laroche.

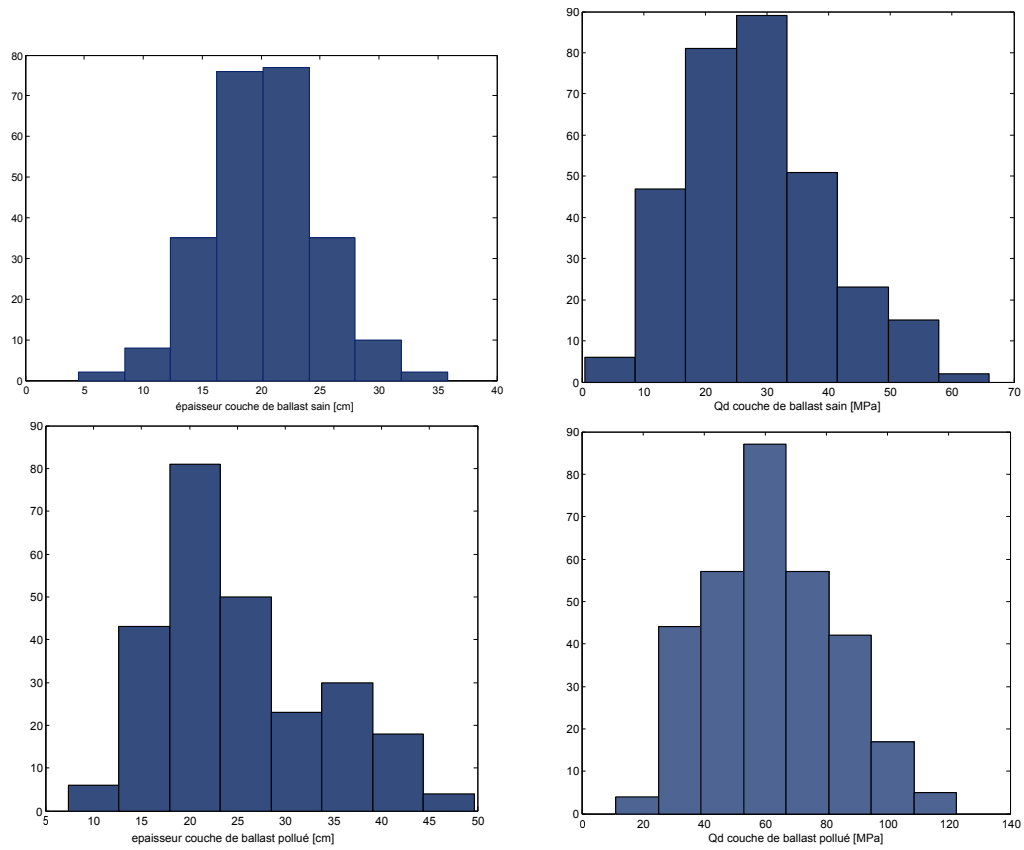


FIGURE 1.22: Histogrammes des paramètres du site de Laroche.

couche		loi normale		loi lognormale	
	paramètre	K-S	$\chi^2$	K-S	$\chi^2$
couche de forme	Épaisseur	Rejetée	Rejetée	Non rejetée	Non rejetée
	$qd$	Rejetée	Rejetée	Non rejetée	Non rejetée
couche de limons	$qd$	Rejetée	Rejetée	Rejetée	Non rejetée

TABLE 1.11: Tests d'ajustement des paramètres du site de Chambéry.

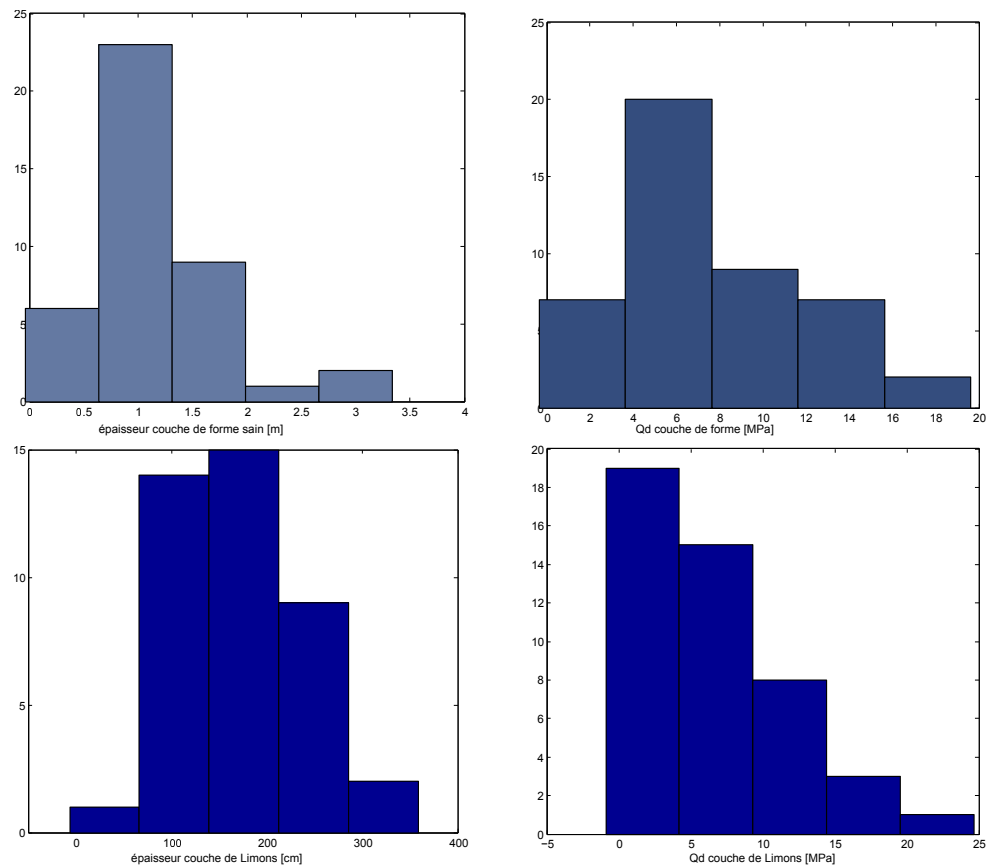


FIGURE 1.23: Histogrammes des paramètres du site de Chambéry.

couche		loi normale		loi lognormale	
	paramètre	K-S	$\chi^2$	K-S	$\chi^2$
ballast sain	Épaisseur	Rejetée	Rejetée	Rejetée	Rejetée
	$qd$	Rejetée	Rejetée	Rejetée	Non rejetée
ballast pollué	Épaisseur	Rejetée	Non rejetée	Rejetée	Rejetée
	$qd$	Rejetée	Rejetée	Rejetée	Non rejetée

TABLE 1.12: Tests d'ajustement des paramètres du site de Melun.



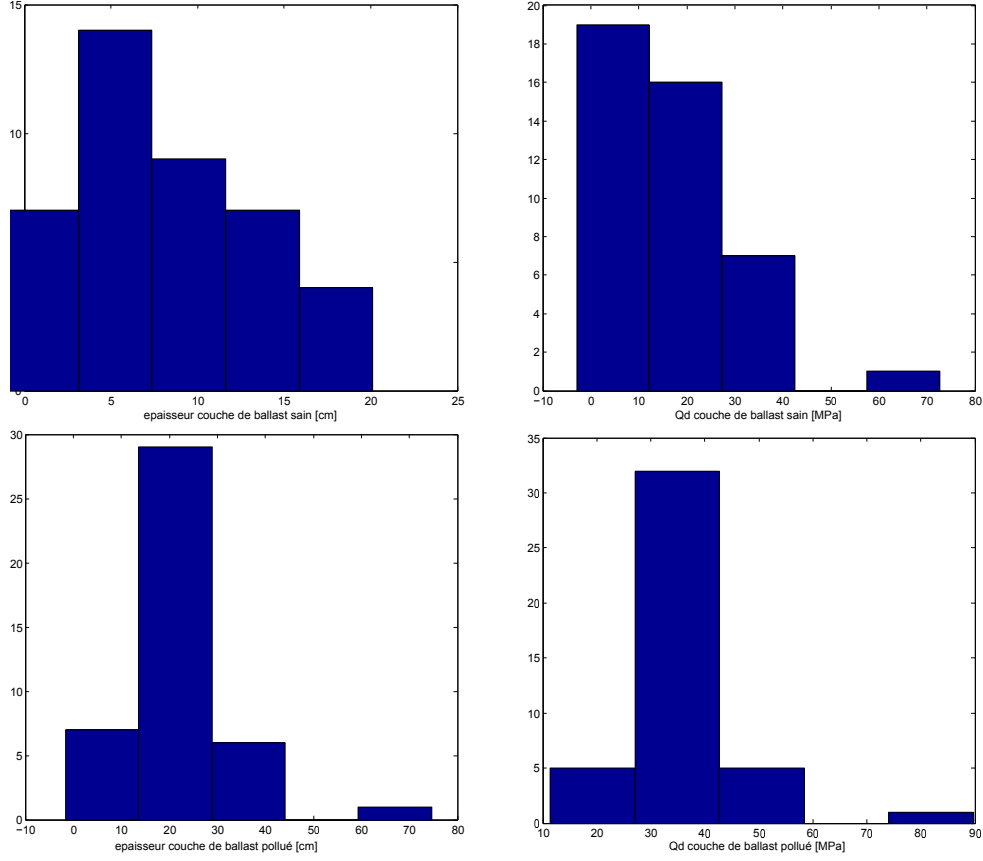


FIGURE 1.24: Histogrammes des paramètres du site de Melun.

Les distributions des mesures du site de Chambéry montrent une tendance à des répartitions lognormales pour tous les paramètres. Cette hypothèse n'est pas rejetée par le test du  $\chi^2$ . Le site de Melun présente une forte dispersion des paramètres mesurés malgré leur bonne qualité, comparé aux autres sites de type LGV. La non-homogénéité au niveau des échantillons peut s'expliquer l'absence d'une tendance générale des différentes mesures vers l'un des deux types de lois théoriques. Sur le site de Laroche, nous remarquons que, pour la couche de ballast, l'épaisseur est de distribution gaussienne et  $q_d$  présente une distribution lognormale, mais c'est l'inverse au niveau des lois pour les paramètres de la sous-couche, ce qui ne permet pas de retrouver de logique pour l'attribution des lois théoriques pour les paramètres du site de Laroche. Il sera donc intéressant dans ce qui suit d'analyser l'effet de la distribution des paramètres entachés d'incertitude en considérant ces deux lois.

#### 1.5.4 Analyse des corrélations des paramètres mesurés

L'analyse de la variabilité menée dans cette étude prend en compte l'existence de plusieurs paramètres mécaniques et géométriques qui peuvent présenter des dépendances. Il est important, afin de raffiner cette analyse, d'examiner les éventuelles corrélations qui peuvent exister entre les différents paramètres.

##### Principe de calcul de corrélation

Soit  $(X, Y)$  un couple de v.a. scalaires. Leur covariance s'écrit :

$$\Gamma_{XY} = \frac{\mathbb{E}((X - m_X)(Y - m_Y))}{\sqrt{\mathbb{E}((X - m_X)^2)}\sqrt{\mathbb{E}((Y - m_Y)^2)}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (1.22)$$

Soit  $\{(X_k, Y_k), k = 1, N\}$  une N-famille de copies indépendantes de  $(X, Y)$ . L'estimateur de la covariance du couple  $(X, Y)$ , associé à cette famille s'écrit :

$$\hat{\Gamma}_{XY} = \frac{\hat{Cov}(X, Y)}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y} \quad (1.23)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{Cov}_{X,Y} &= \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (X_k - \hat{m}_X)(Y_k - \hat{m}_Y) \\ \hat{m}_X &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k \quad ; \quad \hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (X_k - \hat{m}_X)^2 \\ \hat{m}_Y &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k \quad ; \quad \hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (Y_k - \hat{m}_Y)^2 \end{aligned}$$

Soit une réalisation  $\{(x_k, y_k), k = 1, N\}$  de la N-famille de  $\{(X_k, Y_k), k = 1, N\}$ . Une estimée de la covariance de  $(X, Y)$  est alors donnée par :

$$r_{XY} = \frac{s(X, Y)}{s_X s_Y} \quad (1.24)$$

avec

$$\begin{aligned} s_{X,Y} &= \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \mu_X)(y_k - \mu_Y) \\ \mu_X &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad ; \quad s_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N x_k^2 - \mu_X^2 \\ \mu_Y &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N y_k^2 - \mu_Y^2 \end{aligned}$$

$r_{XY}$  peut donc être réécrite :

$$r_{XY} = \frac{\sum_{k=1}^N (x_k - \mu_X)(y_k - \mu_Y)}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (x_k - \mu_X)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^N (y_k - \mu_Y)^2}} \quad (1.25)$$

## Site de Laroche

Sur ce site, les mesures Panda ont permis d'identifier les deux couches suivantes : ballast sain ( $bs$ ) et ballast pollué ( $bp$ ). Nous disposons donc des informations qui concernent l'épaisseur ( $ep$ ) et la moyenne de la résistance de pointe ( $qd$ ) de chacune des couches. La matrice de corrélation des paramètres de ce site est donnée sur le tableau 1.13.

	$ep_{bs}$	$qd_{bs}$	$ep_{bp}$	$qd_{bp}$
$ep_{bs}$	100	37,32	33,38	35,10
$qd_{bs}$	—	100	23,74	52,43
$ep_{bp}$	—	—	100	23,74
$qd_{bp}$	—	—	—	100

TABLE 1.13: Matrice de corrélation (%) des paramètres du site de Laroche.

Nous remarquons sur les résultats obtenus que les coefficients de corrélation entre les paramètres des deux premières couches (ballast sain et ballast pollué) sont relativement faibles et ne dépassent pas la valeur de 38 % à l'exception du coefficient de corrélation entre la résistance de la couche de ballast sain à celui du ballast pollué ( $r = 52,43$  %). Ceci est dû au fait que, lors de la pose de la voie, ces deux couche constituent la même couche et qu'elles ont donc subi le même historique de chargement.

### Site de Chambéry

Les mesures Panda sur ce site ont permis d'identifier les épaisseurs ( $ep$ ) et les résistances ( $qd$ ) des quatre couches suivantes : ballast ( $b$ ), la sous-couche ( $sc$ ), la couche de forme ( $pf$ ) et la couche de limons ( $lm$ ). La matrice de corrélation est donnée dans le tableau 1.14.

	$ep_b$	$qd_b$	$ep_{sc}$	$qd_{sc}$	$ep_{pf}$	$qd_{pf}$	$qd_{lm}$
$ep_b$	100	19,47	38,72	49,53	54,54	8,49	43,26
$qd_b$	—	100	26,21	14,80	42,51	16,36	47,63
$ep_{sc}$	—	—	100	34,40	36,56	15,94	13,68
$qd_{sc}$	—	—	—	100	6,45	43,66	4,55
$ep_{pf}$	—	—	—	—	100	22,65	27,53
$qd_{pf}$	—	—	—	—	—	100	21,58
$qd_{lm}$	—	—	—	—	—	—	100

TABLE 1.14: Matrice de corrélation (%) des paramètres du site de Chambéry.

Sur ce site les coefficients de corrélation entre l'épaisseur et la résistance au sein de la même couche sont proches de ceux du site de Laroche. Les valeurs obtenues sont respectivement de 19,47 %, 34,40 %, 22,65 % et 29,09 % pour les quatre couches.

D'autre part, nous avons calculé les corrélations entre les paramètres mécaniques et géométriques avec les mesures de l'indicateur de maintenance  $NL$ . Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 1.15.

	$ep_b$	$qd_b$	$ep_{sc}$	$qd_{sc}$	$ep_{pf}$	$qd_{pf}$	$qd_{lm}$
NL	39,49	2,96	8,66	50,05	32,94	25,87	35,11

TABLE 1.15: Corrélations des paramètres du site de Chambéry avec le  $NL$ .

Nous remarquons que les paramètres les plus liés au  $NL$  sont respectivement les résistances de la sous-couche, l'épaisseur de ballast et la résistance de la couche de forme.

### Site de Melun

Les coefficients de corrélation des différents paramètres mesurés sur le site de Melun sont donnés dans le tableau 1.16. Les mesures Panda ont permis de distinguer et d'étudier trois couches : ballast sain ( $bs$ ), ballast pollué ( $bp$ ) et la couche de forme ( $pf$ ).

	$ep_{bs}$	$qd_{bs}$	$ep_{bp}$	$qd_{bp}$	$qd_{pf}$
$ep_{bs}$	100	15,31	65,08	1,87	25,72
$qd_{bs}$	—	100	7,96	64,49	3,82
$ep_{bp}$	—	—	100	2,94	4,36
$qd_{bp}$	—	—	—	100	6,29
$qd_{pf}$	—	—	—	—	100

TABLE 1.16: Matrice de corrélation (%) des paramètres du site de Melun.

Sur le site de Melun, nous remarquons, tout comme pour le site de Laroche, une forte corrélation entre les résistances et les épaisseurs des couches de ballast sain et de ballast pollué ( $r = 64,49 \%$ ) ainsi qu'entre les épaisseurs des deux couches ( $r = 65,08 \%$ ). Cependant, nous remarquons que les coefficients de corrélation entre les paramètres de la même couche (épaisseur et résistance) restent faibles par rapport aux valeurs trouvées sur les deux autres sites.

## Bilan

Dans cette partie, nous avons présenté, pour les différents sites de mesures, les coefficients de corrélation entre les différents paramètres mesurés (épaisseurs des couches et résistances de pointe). Nous remarquons que peu de paramètres ont des coefficients de corrélation qui dépassent 50 %. Pour les autres paramètres, les coefficients de corrélation ne dépassent pas 25 % en moyenne.

Les résultats obtenus dans cette partie sont issus du traitement statistique des caractéristiques des mesures *in situ* des paramètres du sol. Or, on reproche souvent à ce type d'analyse de fournir des résultats qu'il est nécessaire d'examiner avec un œil critique avant de leur attribuer une signification physique quelconque [66]. Il faut reconnaître que l'on a trouvé des coefficients de corrélation importants entre des paramètres pour lesquels un simple raisonnement montre qu'aucune corrélation ne peut exister, sinon accidentellement : par exemple le coefficient de corrélation entre l'épaisseur de la couche de ballast et celui de la couche de forme du site de Chambéry (54,54 %). Certaines corrélations établies sur un site peuvent aussi être totalement inadaptées sur un autre site, même constitué d'un sol de même nature. Cette divergence traduit habituellement l'influence d'autres paramètres que ceux qui sont analysés, par exemple l'influence de l'état hydrique du sol, en plus de sa nature [67].

### 1.5.5 Conclusion

Nous avons présenté et appliqué une stratégie simple de traitement statistique des mesures Panda-géoendoscopie. Cette analyse a permis de décrire par variables aléatoires les différents paramètres de la plate-forme ferroviaire moyennant l'estimation des premiers moments statistiques et l'ajustement à des lois théoriques de distribution statistique.

Le couplage Panda-géodenscopie permet de retrouver les épaisseurs ainsi que les moyennes, par couche, des résistances de pointe du pénétromètre. Cependant, il est possible en utilisant les coefficients de Buisman de retrouver les modules œdométriques des différentes couches (cf Eqs(1.12 et 1.13)). Nous présentons dans le tableau 1.17 les coefficients de Buisman  $\alpha$  correspondant aux différents matériaux rencontrés sur les 4 sites étudiés.

Site	Couche	nature du matériau	coef. de Buisman $\alpha$
Riom	ballast	grave	3,5
	couche intermédiaire	sable et grave limoneux	3
	sous-couche	sable et grave limoneux	3
	couche de forme	sable et grave limoneux	3
Chambéry	ballast	grave	3,5
	sable	sable	1,5
	limon sableux	limons sableux	1,15
	limons	limons	1,5
Laroche & Melun	ballast sain	grave	3,5
	ballast pollué	grave	3,5
	sous-couche	???	—

TABLE 1.17: Coefficients de Buisman  $\alpha$  retenus pour les différents sites étudiés.

Dans le tableau 1.18 nous récapitulons les différentes propriétés mécaniques et géométriques qui

serviront à alimenter le modèle numérique présenté dans le chapitre suivant. Il est important de souligner que la taille de certains échantillons limite leur exploitation (site de Riom et couches supérieures du site de Chambéry).

Site	Couche	E [MPa]		Loi de distribution	Epaisseur [cm]		Loi de distribution
		$m$	$\sigma$		$m$	$\sigma$	
Riom	ballast sain	16,59	14,59	**	24	2,73	**
	ballast pollué	38,25	25,44	**	54	10,45	**
	sous-couche	15,24	7,86	**	42	23	**
	plate-forme	18,18	6,93	**	73	23,48	**
Chambéry	ballast	38,91	11,27	**	26,50	11,75	**
	sous-couche	26,55	18,27	**	64,40	25,64	**
	plate-forme	9,20	5,84	lognormale	117,38	59,4	lognormale
	limons	10,74	8,61	lognormale	162,2	69,4	lognormale
Laroche	ballast sain	70,66	16,28	lognormale	20,19	4,25	normale
	ballast pollué	218,29	72,34	normale	25,28	7,09	lognormale
Melun	ballast sain	61,41	40,4	lognormale	7,92	5	**
	ballast pollué	120,61	36,92	lognormale	22,30	10,55	normale

TABLE 1.18: Résultats du traitement statistique des différents sites.

Il est à signaler ici que cette analyse a été confrontée à deux types de problèmes :

- le premier est lié à la non homogénéité des échantillons prélevés ; la non homogénéité de certains échantillons peut être due à la dépendance des mesures de paramètres mal maîtrisés, problème présent pour la majorité des tests *in situ* ;
- la taille de certains échantillons recueillis *in situ* est trop faible pour une analyse statistique rigoureuse (données du site de Riom, et données de la couche de ballast et de la sous-couche pour le site de Chambéry) ; ce manque de données peut être nuisible à la fiabilité des statistiques obtenues. Nous pensons que des échantillons constitués d'un minimum de 80 sondages avec un maillage de 50 m peuvent conduire à des résultats fiables par leur taille avec des distances raisonnables permettant de suivre la variabilité des caractéristiques de la plate-forme qui peuvent être facilement reliées au  $NL$ .

## 1.6 Complémentarité des mesures des caractéristiques de voies

Les outils d'auscultation présentés au début de ce chapitre présentent l'avantage d'être non destructifs. Les mesures par géoradar permettent la caractérisation en continu de la géométrie (épaisseur des couches) et le RSMV permet l'évaluation de la rigidité globale de la voie. Le couplage Panda-géoendoscopie permet d'avoir une description plus complète de tous les composants des couches d'assise (épaisseur, état hydrique, nature des sols, résistance de pointe...).

Les mesures à l'aide du RSMV réalisées dans le cadre du projet Innotrack, montrent que cet outil peut être efficace dans la détection des zones à problème (problèmes de drainage par exemple) qui se traduisent par des variations de la rigidité : un exemple de mauvaises conditions de drainage est illustré sur la figure 1.25 entre les PK 662+000 et 663+000.

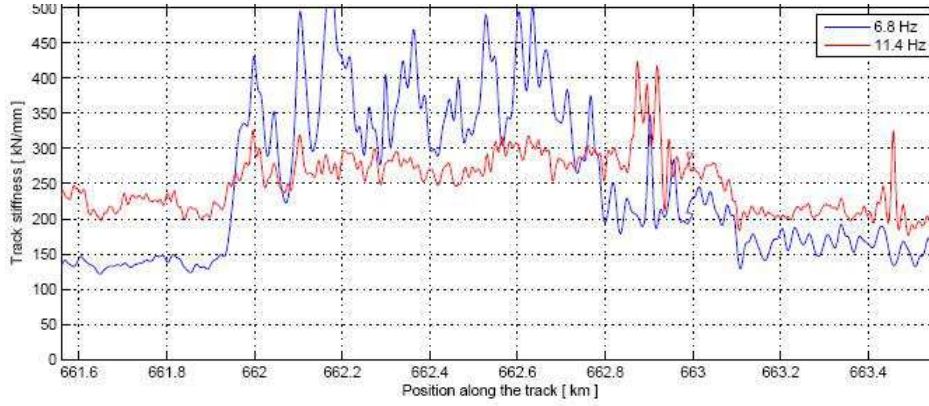


FIGURE 1.25: Exemple de résultats RSMV.

La difficulté majeure lors de l'interprétation des mesures RSMV est de séparer la part de la superstructure de celle de l'infrastructure dans la rigidité mesurée. De plus, il est difficile de dire avec précision quelle est la profondeur d'impact de l'excitation dynamique du RSMV pour chaque fréquence. Nous essaierons, dans la suite, d'apporter quelques éléments de clarification sur ce point, en analysant les corrélations entre les mesures RSMV et les caractéristiques mécaniques et géométriques de différentes couches de l'infrastructure pour les deux fréquences d'excitation. Cependant, le couplage des deux techniques de mesure RSMV et géoradar pourrait être un moyen efficace pour remonter à la source de défauts dans le cas où ces derniers sont liés à l'infrastructure.

Les mesures pénétrométriques en utilisant le couplage Panda-géoendoscope sont le moyen le plus complet pour la description de la structure de la voie : texture, géométrie, état hydrique ainsi que résistance de pointe ( $q_d$ ). Ces paramètres sont donnés pour chaque composant de la plate-forme ferroviaire. Cette description est certes riche en informations concernant les caractéristiques de la plate-forme mais reste toutefois ponctuelle.

Nous pensons que les essais Panda peuvent être complémentaires aux mesures RSMV et géoradar : ces dernières serviront à l'analyse globale du tronçon de voie traité, à la détection des points singuliers et des zones de désordre auxquelles les mesures Panda peuvent apporter des informations supplémentaires concernant la nature du problème.

### 1.6.1 Analyse de corrélation des caractéristiques de voie ferrée

Dans cette partie, nous analysons les corrélations qui peuvent exister entre les caractéristiques mécaniques et géométriques de la voie ferrée d'une part et la réponse de la voie sous excitation dynamique d'autre part.

Pour cela, nous nous basons sur des mesures Panda permettant de déterminer les épaisseurs des différentes couches de la voie ainsi que les résistances de pointe, des mesures par géoradar permettant de caractériser l'épaisseur de la couche de ballast en continu ainsi que des mesures de la rigidité globale de la voie obtenus par RSMV (notée  $K$ ).

### 1.6.2 Épaisseur du ballast - rigidité de la voie

Pour cette analyse, nous disposons de mesures effectuées sur deux zones du site de Chambéry. Sur la zone 1 (entre les PK 150+800 et PK 152+200), nous disposons de mesures par géoradar et RSMV. Sur la zone 2 (entre les PK 153+800 et PK 157+000), nous disposons de mesures RSMV et géoendoscopiques.

## Géoradar-RSMV

Des mesures géoradar sur la ligne Chambéry-St-Pierre-d'Albigny étant disponibles, elles permettent de décrire l'évolution en continu de l'épaisseur de la couche de ballast (exemple sur la figure 1.26). La longueur totale de la zone auscultée est de 1,4 km (entre les PK 150+800 et PK 152+200). Les mesures de la rigidité de la voie (avec deux fréquences d'excitations : 6,8 et 11,4 Hz) ainsi que l'évolution de l'épaisseur de la couche de ballast obtenue par géoradar sont données sur la figure 1.26.

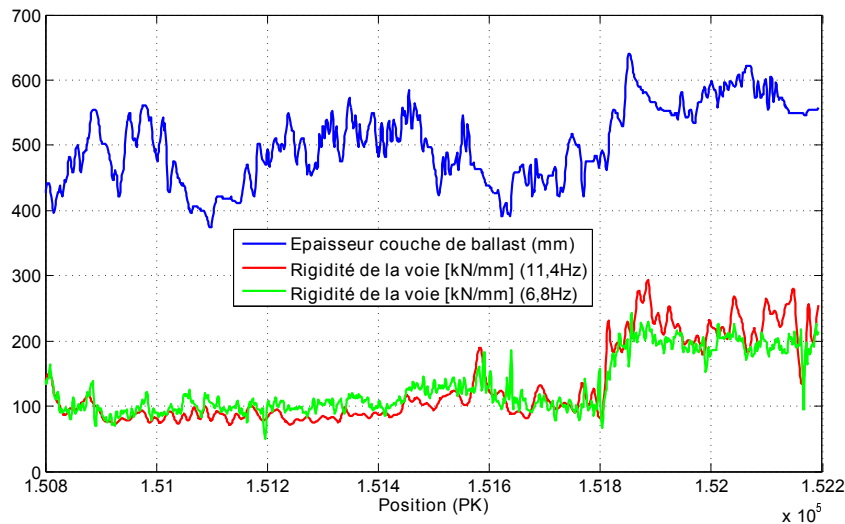


FIGURE 1.26: Mesures géoradar et RSMV.

Sur cette figure, nous remarquons l'existence de deux zones ayant des rigidités différentes qui ont les caractéristiques suivantes :

- zone 1 : entre le PK 150+800 et le PK 151+800, les traverses dans cette zone sont en bois ; les rigidités dans cette zone sont faibles, de moyenne 102 kN/mm ;
- zone 2 : entre le PK 151+800 et le PK 152+200, les traverses sont en béton : la moyenne de la rigidité dans cette zone est de 212 kN/mm.

Ces résultats montrent une forte dépendance de la rigidité de la voie aux caractéristiques de la superstructure et plus précisément au type de traverse dans ce cas.

Les figures 1.27a et 1.27b, représentent l'épaisseur de la couche de ballast en fonction de la raideur de la voie mesurée pour les deux fréquences d'excitation.

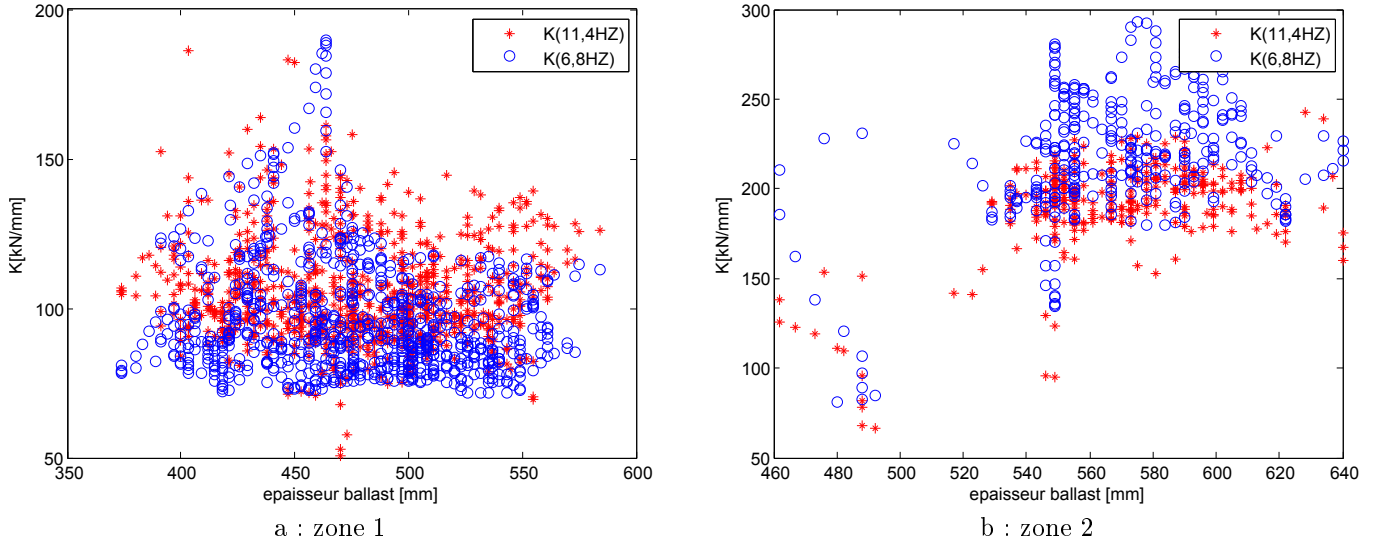


FIGURE 1.27: Rigidité de la voie (RSMV) en fonction de l'épaisseur de ballast.

Les coefficients de corrélation calculés en utilisant l'Eq. 1.25 entre les deux quantités mesurées sont :

- zone 1 : à 6,8 Hz,  $r_{xy} = 15 \%$  et à 11,4 Hz,  $r_{xy} = 20 \%$ ,
- zone 2 : à 6,8 Hz,  $r_{xy} = 36 \%$  et à 11,4 Hz,  $r_{xy} = 49 \%$ .

Nous remarquons que, pour la zone 1, l'épaisseur de la couche de ballast a peu d'influence sur la rigidité de la voie. Par contre, pour la zone 2, les coefficients de corrélation sont plus importants notamment à haute fréquence où le coefficient de corrélation avoisine 50 %.

### Géoendoscopie-RSMV

Nous disposons de 15 sondages Panda-géoendoscope sur la zone située entre le PK 153+800 et le PK 157+000. Ces mesures permettent de déterminer les épaisseurs des différentes couches ainsi que leurs modules. La figure 1.28 donne les épaisseurs mesurées de la couche de ballast ainsi que les rigidités mesurées par RSMV correspondant aux points de mesures.

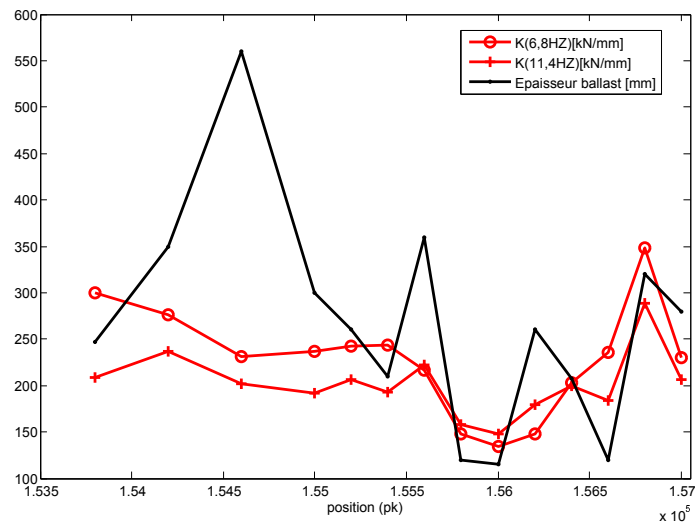


FIGURE 1.28: Mesures Panda et RSMV.

Les coefficients de corrélation sont dans ce cas :

- à 6,8 Hz,  $r_{xy} = 43 \%$ ,



– à 11,4 Hz,  $r_{xy} = 52$  %.

Les résultats obtenus dans cette partie montrent un coefficient de corrélation significatif entre les valeurs des épaisseurs de la couche de ballast issues du Panda-géoendoscope et les valeurs de la rigidité globale de la voie. Nous remarquons que les coefficients de corrélation obtenus ici sont proches des coefficients obtenus dans la zone 2 mesurée par le géoradar.

Il est à noter ici la différence entre ces coefficients (surtout à faible fréquence) et ceux obtenus avec les mesures géoradar, qui peut être expliquée par la différence de taille entre les échantillons (Panda-géoradar) ; les mesures par géoradar sont plus "précises" puisqu'elles permettent la mesure en continu des épaisseurs.

## Conclusion

Dans cette partie, nous avons analysé les corrélations entre les mesures de la rigidité globale de la voie et l'épaisseur de la couche de ballast mesurée par géoradar et Panda-géoendoscope. Cette analyse met en évidence la dépendance de la rigidité aux composants de la superstructure. Pour les tronçons de voie à traverses en béton, les coefficients de corrélation sont plus importants que ceux pour les tronçons à traverses en bois. Nous remarquons aussi que l'épaisseur de la couche de ballast est plus influente sur la rigidité de la voie à haute fréquence qu'à faible fréquence.

### 1.6.3 Modules des couches - rigidité de la voie

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux corrélations entre les différents modules de la plateforme ferroviaire d'une part et la rigidité globale de la voie obtenues par le RSMV. Sur la figure 1.29 nous donnons, pour chaque point de sondage, les modules de chaque couche et les rigidités avec les deux fréquences d'excitation. Les coefficients de corrélation entre la rigidité de la voie (RSMV) aux deux fréquences d'excitation d'une part et les modules des différentes couches d'autre part, sont donnés dans le tableau 1.19.

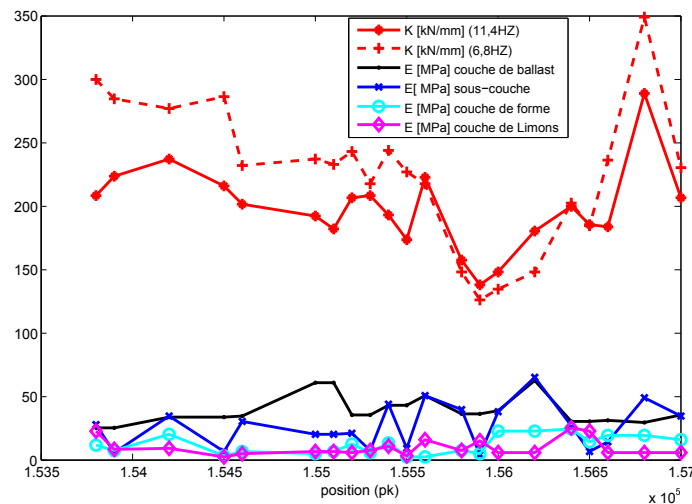


FIGURE 1.29: Mesures Panda et RSMV.

$r_{xy}$ (%)	K (6,8 Hz)	K (11,4 Hz)
E ballast	32,8	28
E sous couche	5,9	21,3
E couche de forme	4,54	13,41
E couche de limons	13,43	5,35

TABLE 1.19: Coefficients de corrélations modules des couches - rigidité de la voie.

Ces résultats montrent que, pour la faible fréquence, le module de la couche de ballast est le paramètre le plus corrélé à la rigidité de la voie. Par contre, à haute fréquence, les modules des trois couches supérieures sont corrélés.

Afin de raffiner cette analyse et dans le but d'estimer la profondeur prise en compte lors du calcul de la rigidité de la voie, nous avons calculé les moyennes des différents  $q_d$  à différentes profondeurs : 50 cm, 1 m et 2 m ; ensuite nous avons calculé les coefficients de corrélation avec les mesures RSMV. Les figures 1.30a et 1.30b donnent les répartitions des différents  $q_d$  en fonction des rigidités respectivement aux fréquences d'excitation de 6,8 et 11,4 Hz. Les coefficients de corrélation sont donnés dans le tableau 1.20.

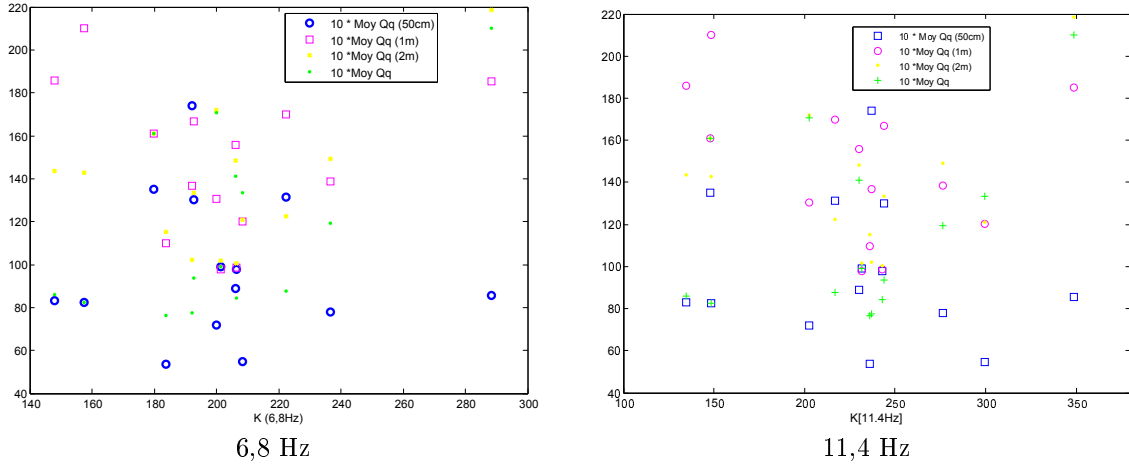


FIGURE 1.30:  $q_d$  en fonction de la rigidité de la voie pour les deux fréquences d'échantillonnage.

$r_{xy} \%$	$q_d(50 \text{ cm})$	$q_d(1 \text{ m})$	$q_d(2 \text{ m})$	$q_{d_{moy}}$
K (6,8 Hz)	18,5	31,4	17,8	19,4
K (11,4 Hz)	6,1	9,3	45,8	50,0

TABLE 1.20: Coefficients de corrélations  $q_d$  - rigidité de la voie.

Les résultats obtenus montrent qu'à faible fréquence d'excitation, la rigidité mesurée par le RSMV est plus liée à la moyenne des  $q_d$  à 1 m de profondeur (qui correspond à la couche de ballast et à la sous couche, qui est la couche la plus rigide de la structure) qu'aux autres valeurs de  $q_d$ .

On remarque que, pour la faible fréquence d'excitation, l'impact du RSMV est limité à ces deux couches et aux éléments de la superstructure (rail, semelles sous rail et traverses). Par contre, pour la haute fréquence, nous remarquons que, plus on fait intervenir les caractéristiques des couches inférieures, plus la corrélation est importante, ce qui peut être lié à la forte dissipation des ondes à cette fréquence. Cependant, les coefficients de corrélation sont inférieurs à 70 % ce qui ne permet pas de considérer les différents paramètres comme fortement dépendants.

#### 1.6.4 Conclusion

Dans cette étude, nous avons tenté d'analyser les corrélations entre la raideur globale de la voie mesurée par le RSMV et les caractéristiques mécaniques et géométriques de la voie. Cette analyse met en évidence la forte dépendance de la rigidité de la voie aux caractéristiques de la superstructure et plus particulièrement des traverses. Nous remarquons que la rigidité mesurée par le RSMV est une rigidité faisant intervenir les composantes de la superstructure et la couche de ballast à faible fréquence, alors qu'à haute fréquence, les paramètres des couches situées à une profondeur inférieure à 2 m sont pris en compte.

## 1.7 Conclusions

Nous avons présenté dans ce chapitre la stratégie adoptée pour la mesure et le traitement des données issues des mesures Panda et géo-endoscopiques permettant de retrouver les épaisseurs et les résistances de pointe de chaque couche composant la structure d'une voie ferrée. Afin d'étudier la sensibilité de la réponse d'un modèle numérique de voie ferrée à la variabilité des paramètres d'entrée du modèle (module et épaisseur des différentes couches du sol), nous avons effectuée une analyse statistique des différents sites de mesure en procédant au calcul des moments statistiques de second ordre. Nous avons ensuite réalisé des tests d'ajustement à deux types de lois théoriques : lognormale (LN) et normale en utilisant deux test :  $\chi^2$  et Kolmogorov-Smirnov.

Pour le modèle numérique, développé par la suite, nous prendrons comme référence le site de Chambéry (un modèle à quatre couches). La distribution de probabilité des paramètres mesurés sur ce site est inconnue a priori. Toutefois, l'hypothèse de variables indépendantes ayant des répartitions lognormales est non rejetée par les tests d'adéquation et sera retenue par la suite. Nous donnons dans le tableau 1.21 le récapitulatif des différents paramètres qui seront utilisés lors du développement du modèle de voie ferrée.

Couche	Épaisseur [m]			module [MPa]		
	moyenne	c.v.(%)	loi	moyenne	c.v.(%)	loi
ballast	0,265	46	LN	38,914	29	LN
sous-couche	0,644	39	LN	26,55	68	LN
couche de forme	1,17	61	LN	9,205	63	LN
sol naturel	1,622	42	LN	10,743	74	LN

TABLE 1.21: Paramètres retenus pour le modèle numérique.

Par rapport à l'objectif principal de ce travail qui est de développer un modèle numérique prenant en compte la variabilité des caractéristiques mécaniques et géométriques des structures ferroviaires, les résultats obtenus dans ce chapitre permettent de spécifier :

- les caractéristiques du modèle mécanique : quatre couches (ballast, sous-couche, couche de forme et couche d'assises),
- la variabilité qui entache les différents paramètres (épaisseurs et modules des couches), décrite par l'intermédiaire des moyennes, des écarts types et des lois de distribution.

## Chapitre 2

# Développement d'un modèle éléments finis de voie ferrée

### 2.1 Introduction

Du fait de son vieillissement, le réseau français de voies ferrées fait actuellement l'objet de renouvellement pour certaines portions ainsi que de nombreuses opérations de drainage et de maintenance localisées qui ont pour effet de provoquer une forte dispersion des propriétés mécaniques et géométriques de ses constituants, laquelle participe grandement au processus de dégradation observé des voies.

Le comportement de l'infrastructure (voie ballastée) constitue un domaine technique et scientifique complexe à maîtriser en raison des fortes non-linéarités et de la variabilité des propriétés physiques qui affectent les matériaux constitutifs de la plate-forme ferroviaire. Afin de caractériser et mieux comprendre ce comportement, la modélisation numérique de l'infrastructure constitue une alternative pertinente à l'approche expérimentale.

Le recours à la modélisation numérique dans le domaine ferroviaire permet de répondre à des enjeux majeurs liés à l'augmentation de la disponibilité, à la réduction des coûts de maintenance tant du matériel roulant que de l'infrastructure, tout en gardant un niveau de sécurité dans des conditions de fonctionnement de plus en plus exigeantes. Dans ce contexte, plusieurs approches ont été développées pour modéliser une portion de voie sous sollicitations dynamiques à l'aide de modèles numériques [40].

Cependant, la prise en compte de la variabilité des caractéristiques mécaniques et géométriques dans la modélisation devient incontournable, nécessitant le recours à une méthode d'éléments finis stochastiques, basée sur le concept d'agrégation entre théorie des probabilités et méthodes numériques de la mécanique.

Dans notre démarche de prise en compte de la variabilité des caractéristiques mécaniques et géométriques d'une portion de voie, nous avons choisi de développer un modèle numérique par éléments finis. Ce modèle doit notamment prendre en compte les propriétés déterminées *in situ* : géométrie des différents éléments de la structure ferroviaire (rail, traverses, semelles sous-rail, etc.), structure multicouche des sols et nature dynamique des excitations.

Dans la première partie de ce chapitre, nous donnons une brève présentation des différentes approches existantes de modélisations de la voie. La deuxième partie est consacrée à la présentation du modèle de voie développé et aux tests de validation.

## 2.2 Modélisation des voies ferrées

La recherche en mécanique des voies ferrées a toujours été réalisée avec deux approches parallèles : l'expérience et la simulation. Pour la simulation numérique, la première tâche est de modéliser la structure et l'excitation. Selon le problème auquel on s'intéresse, les composants sont modélisés de façon plus ou moins détaillée, couplés ou considérés indépendants [73, 3]. Un résumé de ces possibilités est montré sur la figure 2.1.

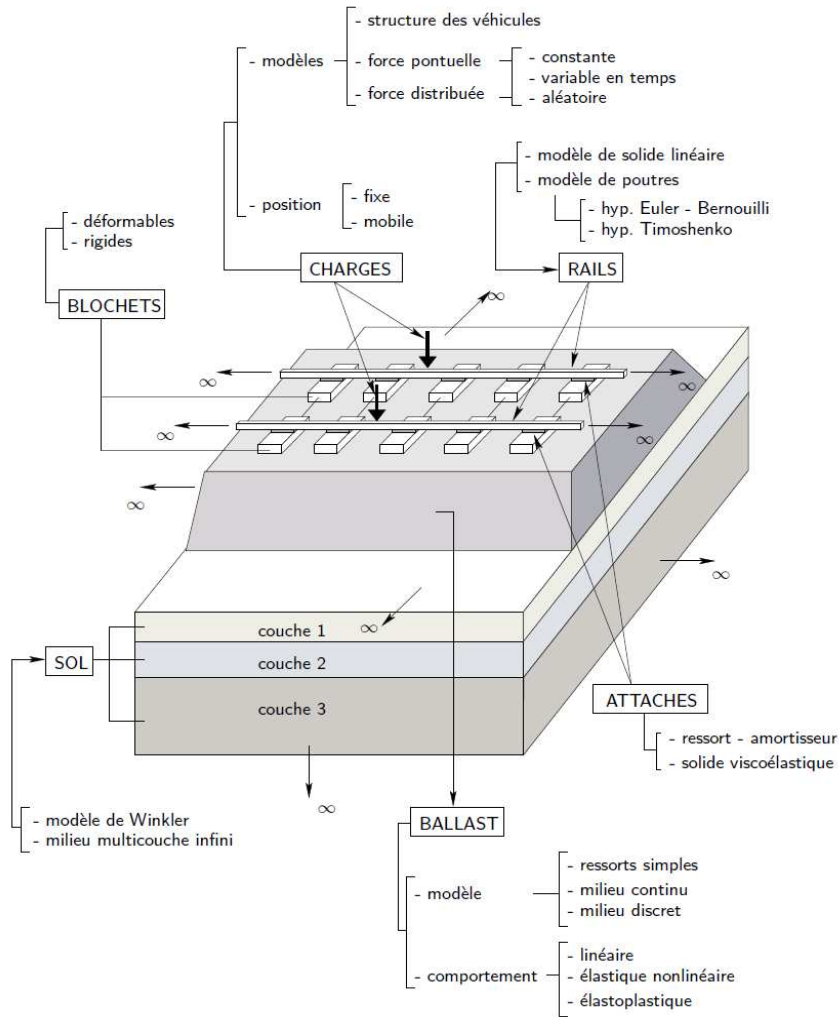


FIGURE 2.1: Modélisation des voies ferrées [73]

Il existe deux types de méthodes de calcul pour l'analyse du comportement dynamique des voies ferrées : l'approche semi-analytique et l'approche numérique [3]. Les méthodes semi-analytiques sont limitées aux problèmes linéaires et de géométrie simple. Par contre, les méthodes numériques (méthodes des éléments finis et des éléments discrets) sont plus adaptées au traitement de problèmes non-linéaires et avec des géométries plus complexes.

Différents types de modélisation ont été testés afin de mieux comprendre les problèmes liés au tassement des voies ferrées [109, 15, 3], à l'interaction roue-rail [53, 78], au comportement du ballast ou encore à la réponse globale de la voie sur les aspects liés au confort [74, 53, 79].

Parmi les essais de modélisation, on peut citer ici quelques modèles existants pour le dimensionne-

ment des voies ferrées. Balsan [9] a réalisé une analyse en 3D par éléments finis du comportement de la structure d'assise en reproduisant des essais *in situ*. Sauvage [93] et Profilidis [78] ont développé (en utilisant le code Rosalie du LCPC) des modèles complexes de voies (rail, traverses, blochets, semelles) pour analyser le comportement des voies soumises à des efforts verticaux et statiques ; des lois de plasticité de type Coulomb-Drucker ont été utilisées pour la couche d'assise (dont les paramètres sont déterminés par des essais triaxiaux). Bodin [15] a pris en compte les efforts latéraux et mis en avant l'influence de la vitesse. Nguyen [73] a modélisé le comportement dynamique de la voie constituée de matériaux élastiques non-linéaires soumis à des chargements cycliques, avec une modélisation simple de l'interaction rail-ballast : il a montré que l'aspect dynamique ne peut être négligé. Teixeira [106, 60] a proposé un modèle multicouche avec des éléments élastiques, dans le but d'analyser la rigidité verticale (réponse globale) de la voie ainsi que sa capacité portante. Ce modèle a contribué à la réduction des coûts de maintenance des voies ferrées par l'optimisation de sa rigidité verticale, ainsi qu'à la compréhension du comportement de la voie dans les zones de transition. Dans le même contexte, Norman [74] a proposé pour la voie un modèle analytique de type masses-ressorts permettant d'estimer la rigidité globale de cette dernière.

## 2.3 Expérience SNCF

La SNCF a évalué différentes démarches de simulation numérique dans le but de mieux comprendre le comportement de la voie ferrée. Ces études ont permis :

- l'interprétation du comportement dynamique de la voie et de ses différentes composantes,
- la quantification de l'influence relative de chaque composant de la voie,
- la prédiction de la dégradation de la géométrie de la voie (tassement ou fatigue).

Nous décrivons dans ce qui suit les différents modèles de voie utilisés pour calculer la réponse dynamique des différents constituants [40].

### 2.3.1 Modèles dynamiques réduits

Le comportement dynamique global de la voie est piloté par le comportement des différentes tranches (modèle réduit) [8]. Ce type de modélisation cherche à étudier précisément le motif de périodicité (tranche) de la voie que représente un élément transversal (cf. figure 2.2a) et qui a donc été choisi comme motif élémentaire et a priori suffisant. L'analyse du comportement modal est effectuée sur une seule tranche.

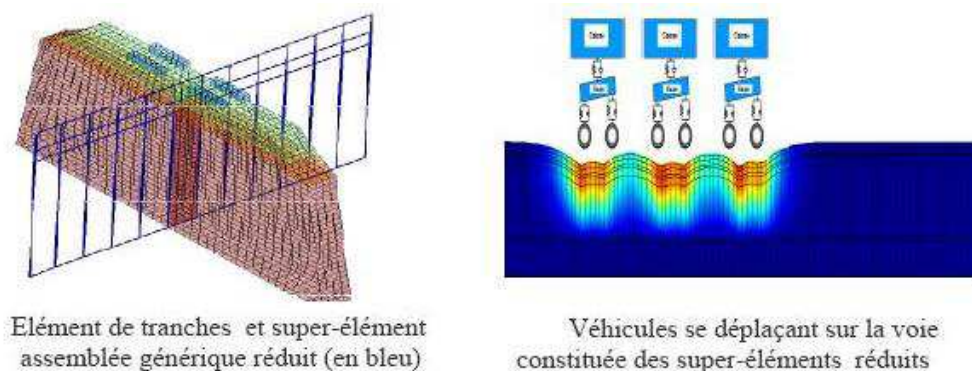


FIGURE 2.2: Principe de modélisation sur Dynavoie [45].

L'analyse du comportement vertical de la voie est examinée en étudiant les modes de traction-compression de la tranche sous l'hypothèse des déformations planes. Ce modèle dynamique réduit

développé dans le cadre d’une collaboration SNCF - SDTools (Dynavoie) [8] prend en compte la structure de la voie, le(s) véhicule(s) et le(s) couplage(s) entre le rail et le(s) roue(s) :

- chaque tranche (découpage transversal de la voie représentant une traverse sans le rail) est modélisée en éléments finis 3D avec tous ses composants (blochet, entretoise, sol...) ; il est possible de représenter autant de couches de sol que l’on veut, en déterminant les caractéristiques géométriques et physiques de celles-ci et en donnant une borne maximale pour la taille des éléments qui est la même pour tout le modèle ;
- la méthode de réduction ne conserve ensuite qu’une seule file de rail (hypothèse de symétrie de la voie) et uniquement les degrés de liberté verticaux (modèle 1D) ;
- un bogie (caisse + essieu) est modélisé par des systèmes masses-ressorts-amortisseurs, les bogies étant indépendants les uns des autres ;
- les contacts roue-rail sont modélisés par des ressorts linéaires (un par roue).

Après la simulation [16, 45, 107], toutes les données dynamiques de la voie en chaque nœud sont accessibles par expansion (déplacements, vitesses et accélérations) ce qui permet d’obtenir les principaux paramètres de comportement de la voie (contraintes, déflexions, déformations...). Grâce à la définition de différentes lois de tassement (de type Guérin-Bodin ou Shenton [15]), le calcul de tassement est réalisé pour plusieurs millions de cycles par interpolation. Il est aussi possible d’introduire des défauts de voie (nivellement) ou de roue. La raideur de la semelle peut être gouvernée par une loi nonlinéaire et les modules d’Young des couches du sol peuvent varier dans le sens de la voie (d’une tranche à une autre).

Les limites actuelles de cet outil sont principalement les suivantes :

- les différents composants ont des lois de comportement élastiques linéaires,
- la modélisation 1D verticale ne prend pas en compte l’effet de chargement latéral,
- une seule file de rail étant modélisée, on ne peut pas étudier le phénomène de roulis ou le comportement en courbe, etc.
- en raison de sa condition de déplacement nul suivant l’axe des  $x$  (axe longitudinal dans la direction de la voie), la voie ne se déforme pas dans son sens de circulation,
- la voie est construite à partir d’un seul élément de tranche et d’hypothèses de périodicité. Si on introduit des variabilités importantes concernant les propriétés physiques de la voie (accidents géologiques, présence d’ouvrages d’arts), le comportement d’une tranche ne sera pas suffisant pour obtenir des résultats satisfaisants. Il faudra enrichir la base de réduction en combinant plusieurs réductions de tranches différentes.

L’objectif de notre approche est d’analyser la réponse dynamique du système avec une hypothèse de comportement non-linéaire. L’approche proposée dans Dynavoie met en jeu des lois de comportement linéaires et des lois de tassements dont les paramètres d’entrée ne sont pas accessibles. Cette approche ne semble donc pas correspondre à nos attentes.

### 2.3.2 Modèles 3D de voie

Les premiers essais de modélisation de voie ferrée ont été réalisés sous forme de modèles statiques nonlinéaires. Ces simulations avaient pour but de simuler le comportement mécanique de la voie ballastée, considérée alors comme un problème de génie civil. Des lois de comportement élastiques nonlinéaires sont implémentées pour le ballast et les couches de sol et utilisées pour des applications locales où les phénomènes dynamiques n’entrent pas en jeu.

Plusieurs modèles ont ensuite été proposés pour prendre en compte l’effet dynamique. Ces modèles éléments finis 3D, développés en utilisant le code de calcul CESAR-LCPC [1, 25, 27], sont utilisés pour simuler le comportement dynamique d’une structure multicouche élastique nonlinéaire (voir figure 2.3) sous l’effet de deux charges roulantes représentant un bogie de train.

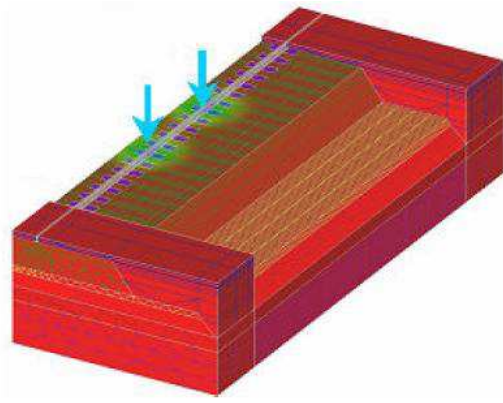


FIGURE 2.3: Exemple de modèle 3D de voie ferrées sur CESAR [27].

Les caractéristiques de ces modèles sont les suivantes :

- prise en compte de toutes les composantes de la voie : rails, semelles, traverses ainsi qu’une représentation multicouche de la plate-forme ferroviaire ; les caractéristiques mécaniques et géométriques des différentes composantes sont issues des mesures *in situ* effectuées dans le cadre du projet européen Supertrack ;
- les couches de sol ont des lois de comportement élasto-plastiques ; la plasticité est prise en compte en considérant le critère de Mohr-Coulomb ; les autres éléments sont supposés à comportement élastique linéaire ;
- afin de minimiser le phénomène de réflexion d’ondes, des couches absorbantes sont introduites à la base et aux extrémités latérales du modèle ;
- le modèle a une longueur de 12 mètres (20 traverses).

La validation du modèle est effectuée en utilisant plusieurs critères : déflexion et accélération des traverses, répartition de la charge sur les traverses, comparaison avec les calculs analytiques de Bousinesq en déplacements verticaux et en contraintes verticales. Le modèle obtenu a été validé dans la zone de diffusion de la charge, jusqu’au sommet de la couche de forme. Contrairement à Dynavoie, les temps de calcul sont relativement importants (environ 4 heures pour simuler le passage des deux roues) et rendent donc délicate l’utilisation d’un tel modèle en contexte aléatoire.

### 2.3.3 Modèles mixtes

De tels modèles, couplant les méthodes des éléments finis et les méthodes des éléments discrets, ont pour objectif de comprendre l’influence sur le tassement global de la couche de ballast, des phénomènes dynamiques locaux à l’échelle du grain. Un modèle de ce type a été proposé dans le cadre d’une coopération SNCF - LAMI (ENPC/LCPC).

Le but est ici de pouvoir obtenir l’accélération verticale, en fonction de données sur la vitesse de passage de trains et la nature du sol. Ce modèle est basé sur des approches dynamiques semi-analytiques linéaires multicouches, des approches numériques linéaires ou non (méthode des éléments finis, développements dans le code CESAR-LCPC), discrètes et continues. Les lois de comportements sont identifiées à partir de mesures expérimentales. Le modèle discret-continu élaboré par L. Ricci [82] suppose que les couches de sol sont continues. Par contre, la couche de ballast est modélisée par des réseaux constitués d’éléments de barre.

Sa démarche a été la suivante : à l’aide d’un bogie simulé par un signal en M, le tassement en fonction de l’accélération et de la nature du sol pour différentes vitesses est évalué expérimentalement. Puis, une fois ces lois déterminées, on cherche à trouver numériquement l’accélération dans le ballast en fonction



de la sollicitation du bogie. Ce modèle comporte deux couches : la couche de ballast modélisée par un modèle discret et une couche de sol représentée par un modèle éléments finis (figure 2.4).

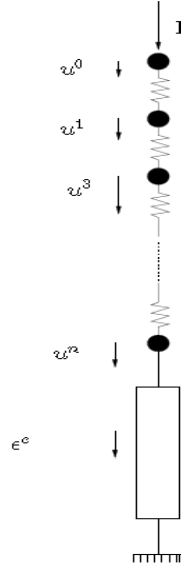


FIGURE 2.4: Schématisation du modèle mixte de Ricci [82].

L'intérêt de cette démarche mixte est de combiner le coût (faible) des simulations numériques pour le court terme (modèle élastique), et des lois expérimentales qui permettent d'appréhender le long terme en décrivant des phénomènes irréversibles.

La construction de modèles semi-analytiques 1D et 3D avec des approches linéaires bicouches aisément généralisables à des multicouches, a permis de confirmer les résultats suivants :

- plus la vitesse augmente, plus les déplacements et les accélérations sont importants ;
- les déplacements et les accélérations sont d'autant plus élevés que la rigidité du sol (ballast ou plate-forme) est faible ;
- la densité de grains sur une hauteur déterminée influence le comportement : si la densité devient faible, l'amas granulaire se comporte sensiblement comme un milieu discret (*i.e.* il existe des différences entre les résultats des modèles discret/continu et continu/continu), tandis que si la densité de grains s'accroît, l'amas granulaire se comporte comme un milieu continu.

Ces modèles semi-analytiques sont relativement simples et rapides, mais ils ne peuvent pas s'adapter à des structures complexes ni à des comportements non-linéaires (pour le ballast). C'est pourquoi la méthode des éléments finis, méthode souple et adaptable pour la prise en compte de la géométrie et des lois de comportement, a été retenue.

### 2.3.4 Conclusion

L'ensemble des modèles présentés ici a été développé dans un cadre déterministe dans le but de mieux interpréter le comportement de l'ensemble de la plate-forme ferroviaire ou des composants de celle-ci. Ces modèles ne peuvent pas être utilisés dans notre démarche de prise en compte de la variabilité, soit en raison des temps de calcul importants qu'ils nécessitent (modèle 3D sous CESAR, par exemple), soit car ils ne permettent pas de reproduire le comportement nonlinéaire.

Nous avons donc procédé au développement d'un modèle EF multicouche de voie ferrée dans un contexte dynamique en utilisant le code de calcul Cast3M [24] pour lequel nous disposons d'un certain nombre d'outils probabilistes. Afin de minimiser les temps de calcul, nous avons choisi de développer un modèle 2D.

## 2.4 Mise en œuvre d'un modèle EF de voie

Plusieurs approches numériques, principalement sur la base de la méthode des éléments finis (MEF), ont été proposées au cours des dernières décennies pour décrire le comportement global ou local de la voie ferrée. Ces modèles ont été développés dans un cadre statique et/ou dynamique, comme présenté dans la section précédente. Pour la majorité de ces modèles, le comportement vertical de la voie et plus particulièrement le tassement, les déflexions du rail, l'interaction véhicule-voie, la rigidité verticale globale de la voie... sont les paramètres les plus étudiés.

D'une manière générale, le comportement dynamique d'une portion de voie ferrée peut être décrit par un modèle EF nonlinéaire dont l'expression est de la forme :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbb{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \boldsymbol{\xi}(t), t) = \mathbf{0} , & t > 0 \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 , \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $t$  est le temps,  $\mathbf{q} : t \rightarrow \mathbf{q}(t)$  est une fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^l$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\ddot{\mathbf{q}}$  sont ses dérivées premières et secondes par rapport à  $t$ ,  $\boldsymbol{\xi} : t \rightarrow \boldsymbol{\xi}(t)$  est une fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^l$ ,  $\mathbb{H} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t)$  est une fonction définie de  $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}^l$ ,  $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$  est un élément donné de  $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$  et  $l$  est un entier positif représentant le nombre de degrés de liberté (ddl).

La fonction  $\mathbb{H} = (\mathbb{H}(\mathbf{r}), \mathbf{r} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+)$  caractérise le comportement dynamique nonlinéaire de la voie ferrée. Les fonctions  $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}(t), t \in \mathbb{R}_+)$  et  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}(t), t \in \mathbb{R}_+)$  représentent, respectivement, les forces et les déplacements nodaux.  $\boldsymbol{\xi}$  et  $\mathbb{H}$  sont données,  $\mathbf{q}$  est l'inconnue du problème et est déterminée numériquement.

La contrainte de temps de calcul implique le choix d'un modèle 2D. Afin de conserver les dimensions transversales de la superstructure et en particulier celles du rail et des traverses, on retient une formulation du problème en contraintes planes.

### 2.4.1 Loi de comportement des matériaux

La plupart des modèles numériques de voie ferrée utilisent des lois de comportements élastiques ou élasto-plastiques [79]. Dans ce travail, les composants de la superstructure sont assimilés à des milieux continus, homogènes et isotropes, leur comportement étant supposé élastique linéaire avec des propriétés déterministes. En revanche, les sols (matériaux granulaires) présentent des déformations irréversibles et ils sont le plus souvent considérés comme des matériaux ayant un comportement élasto-plastique. Le choix des lois de comportement des différentes couches de sol tient compte de la méthodologie et des résultats présentés dans le chapitre 1 :

- on mesure *in situ* la résistance de pointe  $q_d$  et sa variabilité,
- l'approximation du module élastique fait appel au coefficient de Buisman dont la variabilité n'est pas connue.

Cette méthodologie implique un choix de loi de comportement simple avec peu de paramètres. Afin de prendre en compte l'effet de la plasticité dans le comportement des couches du sol, nous considérons, pour ces couches, un comportement élasto-plastique avec écrouissage isotrope linéaire. Ce type de modèle de comportement est souvent utilisé en l'absence des caractéristiques intrinsèques permettant de définir au mieux le comportement des sols. Afin de limiter le nombre de paramètres du modèle, le module d'écrouissage des différentes couches sera pris égal au quart du module de Young de la couche :

$$E_c = \frac{1}{4} E \quad (2.2)$$

Ce type d'hypothèse est couramment utilisé en ingénierie ferroviaire.

### 2.4.2 Maillage

La densité du maillage est adaptée à la précision et au type de résultat auquel on s'intéresse. Dans notre cas, on s'intéresse en particulier aux évolutions des déflexions et des accélérations au niveau du rail et des traverses au cours du temps. On propose donc une densité de maillage qui respecte les conditions suivantes :

- une densité importante dans les zones les plus sollicitées (rail, semelles, traverses et ballast), les tailles des différents composants de la structure étant données dans le tableau 2.1,
- une densité moins importante dans les zones lointaines tout en évitant des élancements supérieurs à 5.

Un exemple du maillage réalisé avec des éléments quadratiques d'un tronçon de 3 traverses (1,8 m) est représenté sur la figure 2.5. Le modèle mis au point dans le cadre de cette étude permet de générer un modèle de voie de longueur variable (selon le nombre de traverses fixé par l'utilisateur).

Composante	$\Delta x$ (cm)	$\Delta y$ (cm)
rail	6,5	1,5
semelle	6	0,9
traverse	6	5,5
ballast compacté	6,5	7,42
sous-couche	6,5	12,88
couche de forme	6,5	12,15
limon	6,5	27,03

TABLE 2.1: Taille des mailles pour les composants du modèle.

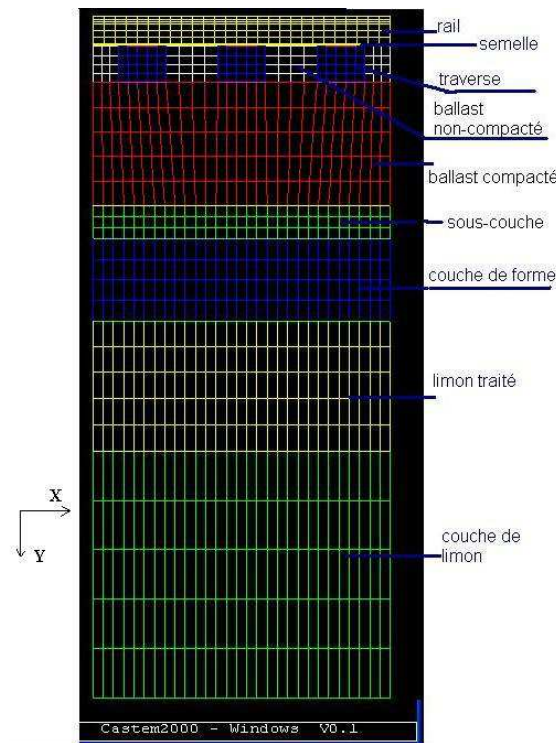


FIGURE 2.5: Maillage d'un modèle à 3 traverses.

Le calcul dynamique par la méthode des éléments finis présente deux inconvénients majeurs : la dispersion numérique des ondes et la réflexion d'ondes sur les frontières du domaine de discrétisation [94]. Les problèmes de réflexion d'ondes peuvent être résolus par différentes approches. Nous

citons à titre d'exemple la mise en œuvre d'éléments de frontière absorbante [1, 25, 27] : cette solution a généralement comme conséquence d'augmenter les temps de calculs. La deuxième solution consiste à adapter la géométrie du modèle afin de minimiser les effets de ces ondes. Dans ce type de configuration, on se met suffisamment loin des frontières pour l'analyse du comportement de la structure. C'est cette deuxième approche qui a été choisie dans le cadre de ce travail.

La dispersion des ondes provoque une variation artificielle de la vitesse de propagation des ondes en fonction des caractéristiques du modèle éléments finis. La dispersion numérique dépend de la taille des éléments du modèle par rapport à la longueur d'onde. Par conséquent, la taille du maillage est conditionnée par la valeur de la longueur d'onde (ondes de propagation).

La dispersion numérique est d'autant plus importante que la taille des mailles est grande par rapport à la longueur d'onde. Pour minimiser l'erreur numérique, la taille du maillage  $\Delta x$  est limitée par la valeur  $\Delta x \leq \frac{\lambda}{6}$  :

$$\Delta x \leq \frac{\lambda}{6} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{6f} \quad (2.3)$$

avec :

- $E$  le module de Young du matériau en Pa ;
- $\rho$  la masse volumique du matériau en  $\text{kg/m}^3$  ;
- $f$  lfréquence maximale fixé à 200 Hz ;
- $\lambda$  longueur d'onde en m.

Les longueurs de maille maximales calculées pour les matériaux utilisés dans le modèle ( $\frac{\lambda}{6}$ ) sont les suivantes :

- rail : 4,02 m,
- semelle : 0,175 m,
- traverse : 2,94 m,
- ballast compacté : 0,32 m,
- ballast non compacté : 0,163 m,
- sous-couche : 0,342 m,
- couche de forme : 0,444 m,
- sol (limon) : 0,527 m.

Le maillage du modèle n'atteint ces tailles de mailles maximales dans aucun des matériaux (*cf* tableau 2.1).

### 2.4.3 Conditions aux limites

Le domaine occupé par la voie ferrée est supposé de longueur infinie. Le modèle numérique concerne une portion de ce domaine et les conditions aux limites suivantes ont été considérées :

- blocage des déplacements dans la direction horizontale sur les deux faces latérales du modèle,
- blocage des déplacements dans la direction verticale sur la face inférieure de la couche du sol.

Notre analyse se focalisera sur l'étude du comportement des composantes se situant loin des bords (dans la partie centrale du domaine). Les liaisons entre les différentes frontières des composants du modèle sont considérées comme parfaites.

### 2.4.4 Chargement

*In situ*, la structure de la voie supporte une charge roulante composée d'une charge statique (poids des véhicules) et d'une surcharge dynamique due aux variations du module de rigidité le long de la voie [53].

Dans notre cas, nous prenons uniquement en compte la composante statique : 85 kN par roue. A chaque pas de temps, dépendant de la taille de la maille du rail et de la vitesse imposée, on applique les deux charges aux nœuds correspondant à la position des roues à cet instant.

### 2.4.5 Simulation numérique

Les simulations numériques consistent à faire passer, le long du rail, les charges appliquées. Il est alors possible grâce au modèle EF, d'obtenir, à chaque pas de calcul, des informations concernant la déformée de la structure (cf figure 2.6) ainsi que l'évolution en fonction du temps des déflexions et des contraintes (figure 2.7) ou encore la courbe contrainte-déplacement (figure 2.8) en n'importe quel point de la structure.

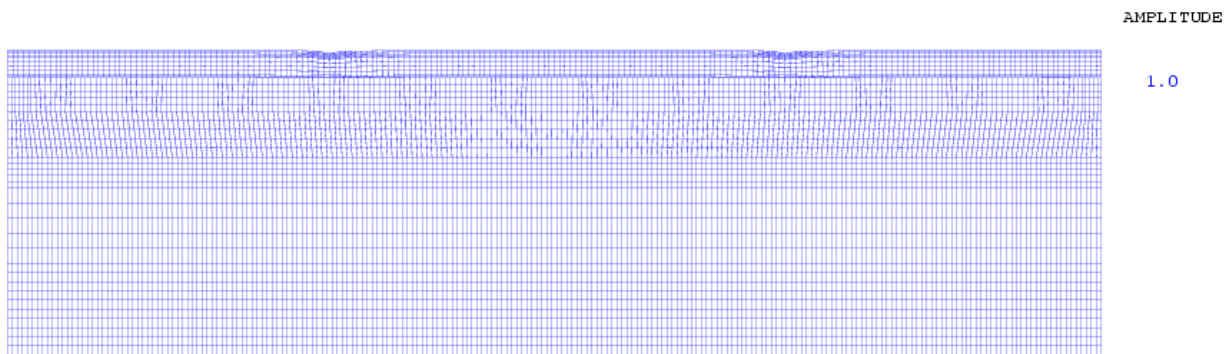


FIGURE 2.6: Exemple de déformée de la structure.

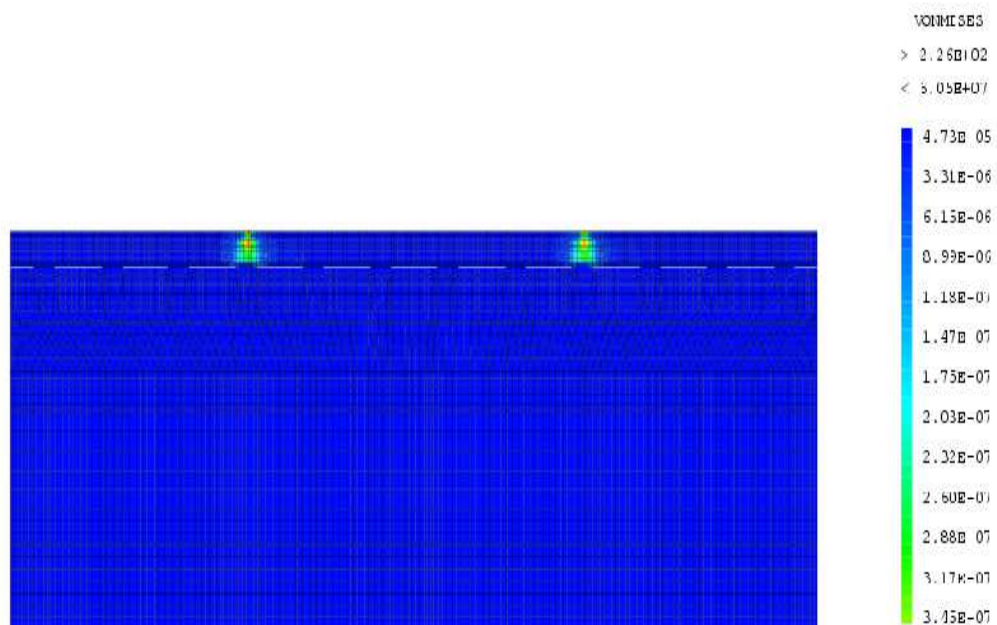


FIGURE 2.7: Contrainte équivalente de Von Mises à un instant de calcul.

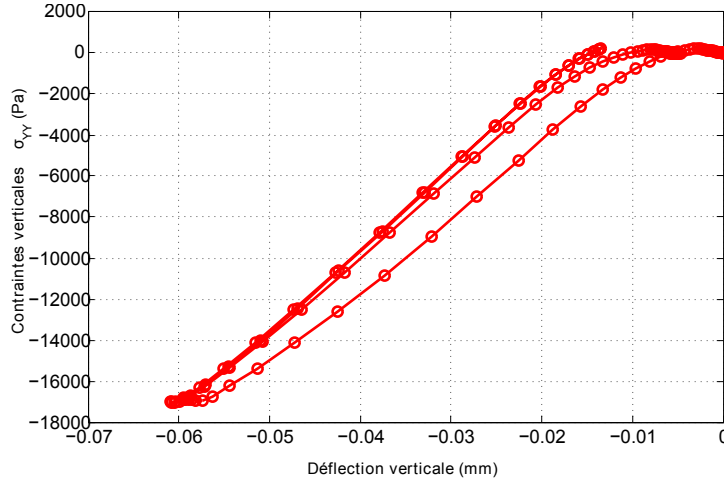


FIGURE 2.8: Évolution de la contrainte en fonction de la déflexion au cours du passage des deux charges dans la couche de ballast.

## 2.5 Validation du modèle

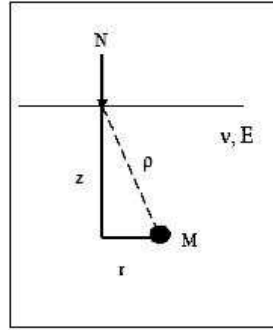
La phase de validation d'un modèle numérique est une étape importante et incontournable. La validation du modèle EF présentée ici concerne trois aspects :

- validation analytique par comparaison au critère de Boussinesq,
- validation numérique statique par comparaison des résultats du modèle à des résultats cibles issus d'études similaires [93, 78],
- validation numérique dynamique par comparaison des évolutions temporelles de déflexions et accélérations fournies par le modèle EF à celles issues d'enregistrements *in situ*.

### 2.5.1 Critère de Boussinesq

Le but de cette étude est la validation du maillage du modèle à l'aide d'une comparaison avec le problème analytique de Boussinesq qui suppose que le massif est homogène. Ce critère permet d'estimer les valeurs des contraintes et des déflexions  $w$  sous l'effet d'une charge statique ( $N$ ), en tout point du sol.

Les différentes composantes du champs de contrainte dans le plan  $xOy$  ainsi que les déflexions en tout point de l'espace sont obtenues par les équations suivantes :



$$\sigma_{yy} = \frac{3N}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \quad (2.4)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{2\pi} \left[ \frac{3z \cdot r^2}{\rho^5} - \frac{1 - 2\nu}{\rho(\rho + z)} \right] \quad (2.5)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{3N}{2\pi} \frac{r.z^2}{\rho^5} \quad (2.6)$$

$$w = \frac{N}{2G.\pi} \left[ \frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right] \quad (2.7)$$

avec  $G$  le module de cisaillement élastique.

Dans cette approche, on attribue à toutes les composantes des caractéristiques mécaniques ( $E$  et  $\nu$ ) identiques :

- un module de Young égal à 250 MPa,
- un coefficient de Poisson de 0,2,
- une densité volumique égal à 1700 kg/m<sup>3</sup>.

La longueur du modèle correspond à 10 traverses et le comportement du massif est supposé élasto-plastique parfait.

Les résultats obtenus par le modèle EF pour le déplacement vertical et les contraintes verticales et horizontales sont comparés à ceux fournis par les formules de Boussinesq sur les figures 2.9, 2.10 et 2.11. Ces résultats sont ceux obtenus sur la ligne verticale à l'aplomb de la force statique appliquée ( $r = 0$ ) au centre du modèle.

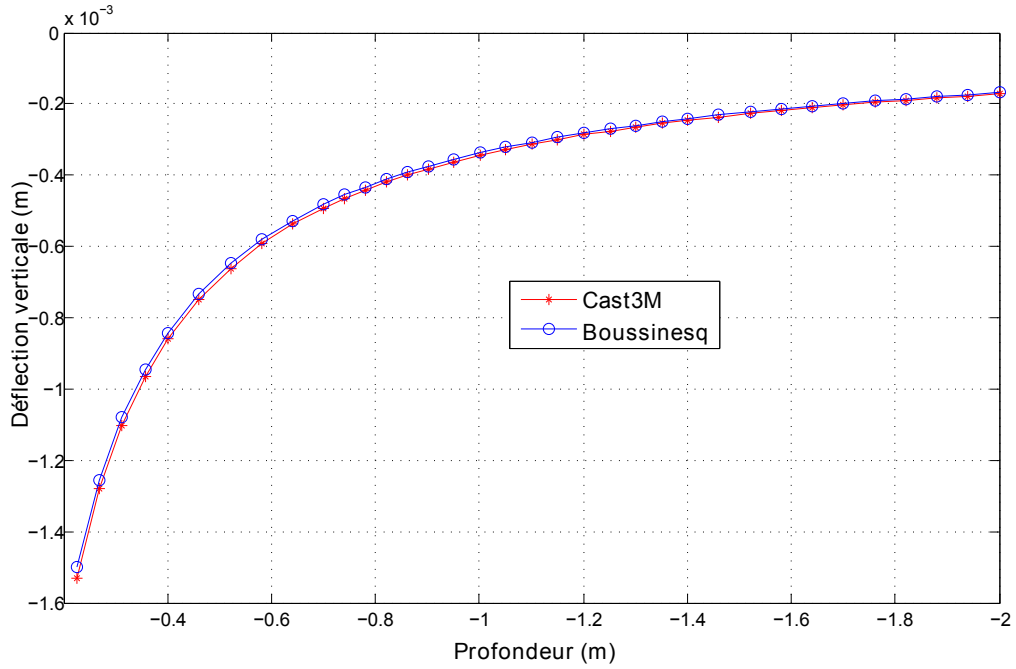


FIGURE 2.9: Déplacement vertical au niveau de la ligne d'application de la charge au centre du modèle.

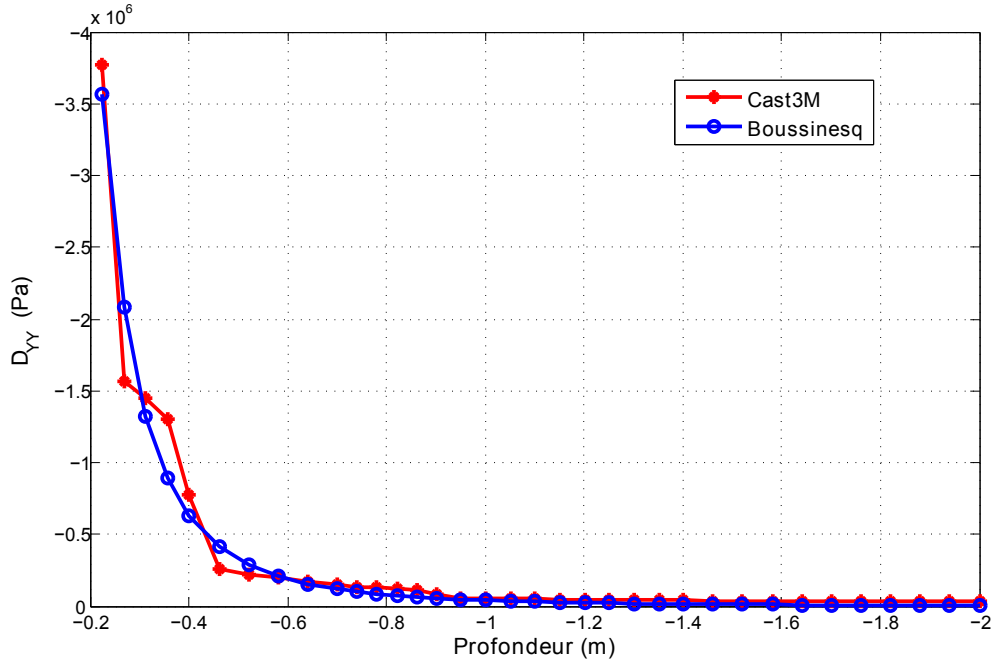


FIGURE 2.10: Contrainte verticale au niveau de la ligne d'application de la charge au centre du modèle.

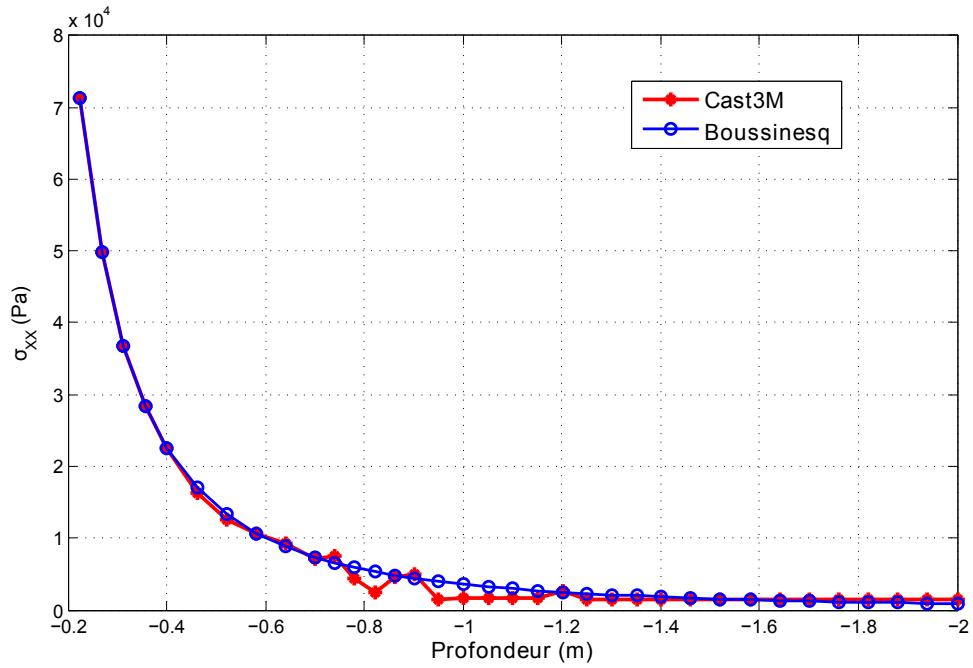


FIGURE 2.11: Contrainte horizontale au niveau de la ligne d'application de la charge au centre du modèle.

On peut constater que les valeurs du déplacement et des contraintes obtenues par le calcul Cast3m sont proches des valeurs théoriques (Boussinesq). De légères variations sont cependant visibles aux interfaces entre couches dues à la variation de la densité de maillage (figure 2.9 et 2.10) ; l'erreur ne dépasse cependant pas 5 %, ce qui reste satisfaisant.



## 2.5.2 Validation numérique statique et dynamique

### Cas d'étude : site de Beugnâtre

Nous avons choisi de modéliser une tranche de voie de la ligne LGV Nord, à proximité du site de Beugnâtre, pour lequel nous disposons des caractéristiques géologiques et mécaniques. Différentes modélisations numériques de ce tronçon de voie ont été élaborées par la SNCF en utilisant les codes de calcul Dynavoie [16, 45, 107] et CESAR-LCPC [1, 25, 27].

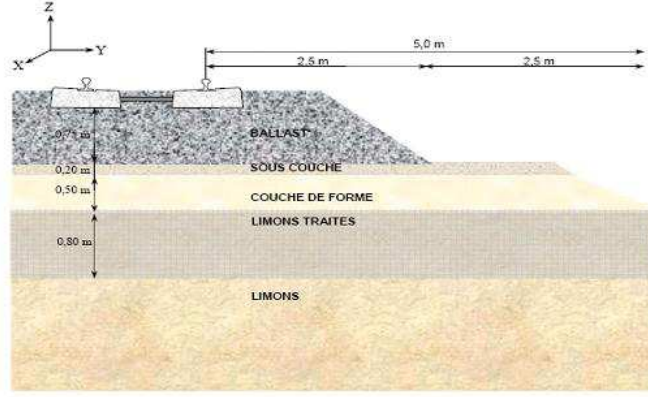


FIGURE 2.12: Coupe transversale de la voie sur le site de Beugnâtre.

Le site de Beugnâtre est situé au PK 140+934 de la LGV Nord Europe (LN3) en France. L'épaisseur de la couche du ballast sur ce site est assez importante (75 cm environ contre 30 cm sur une LGV ordinaire). En dessous, on retrouve la sous-couche (20 cm) et la couche de forme (50 cm) qui sont plus raides. Plus en profondeur se trouve une couche de limons traités de 80 cm d'épaisseur. La couche la plus profonde représentée dans le modèle est composée de limons (cf figure 2.12). Les rails sont de type UIC60 et les traverses de type bi-blocs VAX U41. L'espacement entre les traverses est de 0,6 m.

On étudie le comportement de la voie soumise au passage d'un bogie composé de deux roues et modélisé par deux charges mobiles constantes de 85 kN chacune (égale au quart de la masse totale supportée par le bogie, soit une charge par essieu de 170 kN). Les deux charges sont espacées de 3 m. Dans ce modèle, le poids des divers constituants de la voie n'est pas pris en compte, de façon à isoler l'effet de la charge appliquée. La vitesse de passage des roues est fixée par l'utilisateur sachant que, pour les différents mesures effectuées, les vitesses de passage enregistrées varient entre 297 et 303 km/h. Pour le calcul effectué sous chargement mobile, nous considérons une vitesse de 300 km/h.

Le site a été traité dans le cadre du projet européen Supertrack [105, 110]. Une reconnaissance géotechnique a été effectuée à l'aide des mesures SASW (Spectral Analysis of Surface Waves). Ces dernières consistent en des mesures non-destructives du profil des vitesses de propagation des ondes de cisaillement  $c_s$  dans le sous-sol. Ces vitesses, combinées avec les masses volumiques  $\rho$  et les coefficients de Poisson, permettent de déterminer les caractéristiques élastiques des différentes couches :

$$E, \nu, c_s \Rightarrow G = \rho c_s^2, E = 2G(1 + \nu) \quad (2.8)$$

où  $G$  et  $E$  sont respectivement le module de cisaillement et le module de Young.

Nous donnons dans le tableau 2.2 les valeurs des paramètres décrivant le modèle ( $E$ ,  $\nu$  et  $\rho$ ).

composante	$E$ (MPa)	$\nu$	$\rho$ ( $kg/m^3$ )	épaisseur (mm)
rail	200 000	0,3	7 850	-
semelle	40	0,25	900	9
traverse	30 000	0,25	2 400	210
ballast non compacté	50	0,2	1 300	210
ballast compacté	250	0,2	1 700	750
sous-couche	360	0,35	2 135	200
couche de forme	544	0,35	2 000	500
limon traité	796	0,3	1 990	800
limon	41	0,3	1 800	1500

TABLE 2.2: Caractéristiques des matériaux du site de Beugnâtre.

Dans cette partie, nous avons choisi de travailler avec un modèle de voie comportant 50 traverses. La validation des résultats du modèle Cast3M est basée sur une comparaison des mesures sur le site de Beugnâtre et des résultats obtenus par les codes de calcul Dynavoie [16, 45, 107] et CESAR-LCPC [1, 25, 27].

### Validation pour le cas d'un chargement statique

On applique dans ce cas une charge de 85 kN (l'équivalent de la charge d'une roue) et on compare les valeurs des déformations et des contraintes obtenues à des valeurs mesurées ou données par deux critères permettant la validation du modèle en statique.

Le point de vue dominant dans la conception en ingénierie ferroviaire, sur la base de considérations empiriques, est que, quand la charge d'une roue est appliquée au-dessus d'une traverse, cette dernière supporte 50 % de la charge de la roue et chacune des traverses voisines supporte 25 %. Cependant, les mesures de contraintes ont montré que ce n'était pas le cas. L'analyse par la méthode des éléments finis [93, 78] met en évidence que la distribution des charges de la roue le long de traverses successives est la suivante :

- traverse au-dessous de la charge : 40 %,
- premières traverses voisines : 23 %,
- deuxièmes traverses voisines : 7 %.

Donc, quand une roue est appliquée sur une traverse, son effet est négligeable au-delà de la troisième traverse. Cette répartition (figure 2.13) des charges n'est pas nuisible au dimensionnement des traverses.

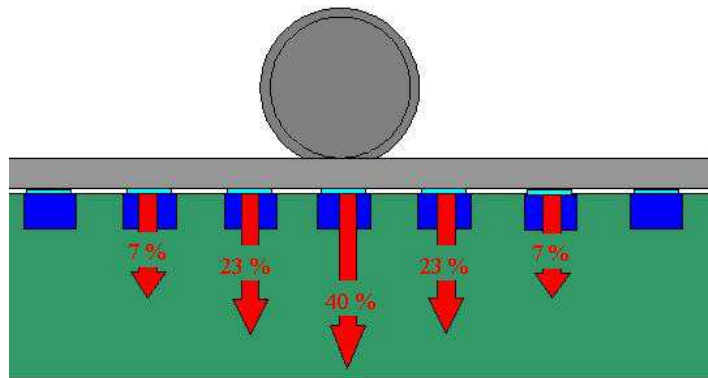


FIGURE 2.13: Répartition des charges sur les traverses adjacentes sous l'effet de charge de roue appliquée au dessus d'une traverse.

La répartition des contraintes sur les traverses, obtenues à partir du modèle EF, est donnée dans le tableau 2.3.

Traverse	N	N+1	N+2	N+3
Théorique %	40	23	7	0
Modèle %	39,48	23,54	6,89	0,38

TABLE 2.3: Répartition des charges sur les traverses adjacentes.

Les valeurs obtenues sont proches des valeurs de référence, l'écart n'excédant pas 1,4 %. Nous concluons que ce modèle permet de retrouver des valeurs couramment admises. Nous donnons sur la figure 14 la répartition des contraintes de Von Mises sur les traverses adjacentes.

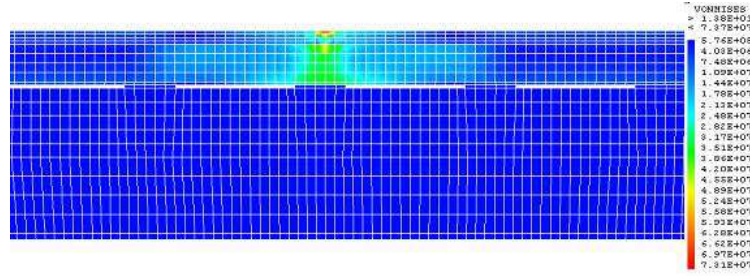


FIGURE 2.14: Contraintes de Von Mises sous charge statique.

## Validation pour le cas d'une charge roulante

### Déflexions

Des mesures de déflexions sur le site de Beugnâtre ont été effectuées au niveau des bases des traverses et de la face supérieure du rail. La moyenne des déflexions sous les bases des traverses atteint une amplitude de 0,2 mm environ. Pour les LGV, on considère que la déflexion varie autour de 0,1 mm (voie de très bonne qualité) et jusqu'à 0,3 ou 0,4 mm [105] pour des voies de qualité médiocre. La figure 2.15 présente les déflexions obtenues par le modèle de voie réalisé avec Cast3M lors du passage des deux charges roulantes (passage d'un boggie) au niveau de la neuvième traverse du modèle. Les amplitudes sont voisines de 0,18 mm, valeur proche de la moyenne de l'expérience et de celles obtenues à l'aide du code de calcul CESAR-LCPC. L'écart entre les valeurs de déflexions aux points A, B et C sont respectivement de 8 %, 3 % et 5 %. La corrélation entre les deux séries est de 91 %.

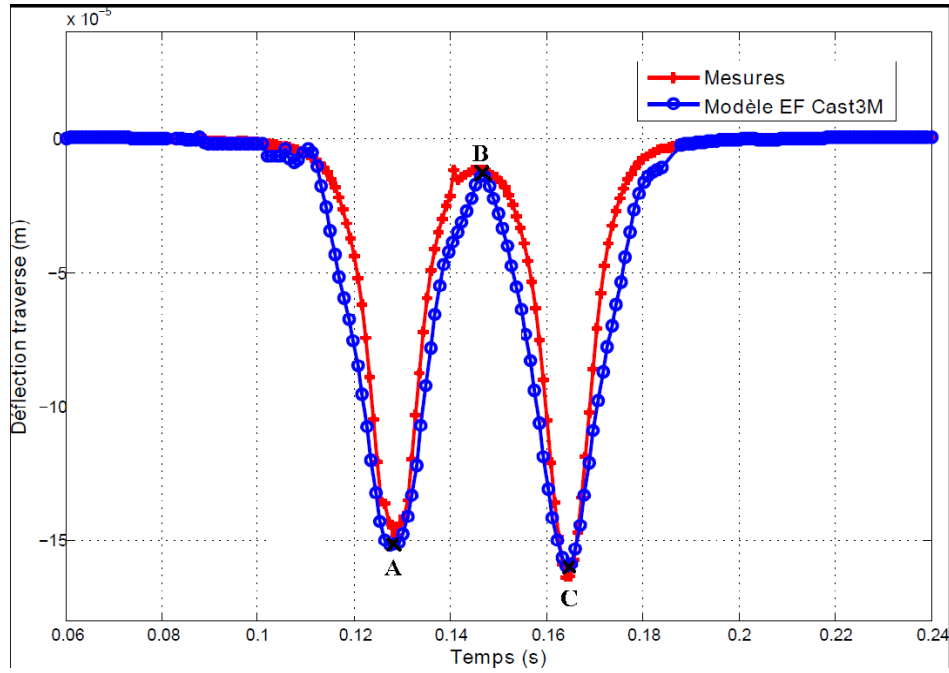


FIGURE 2.15: Déflexions verticales sous traverse.

Sur la figure 2.16, nous donnons les déflexions au niveau de la surface du rail. La déflexion atteint des amplitudes avoisinant 0,45 mm, valeur considérée comme satisfaisante sachant que les déflexions mesurées sur le site de Beugnâtre varient entre 0,3 à 0,6 mm.

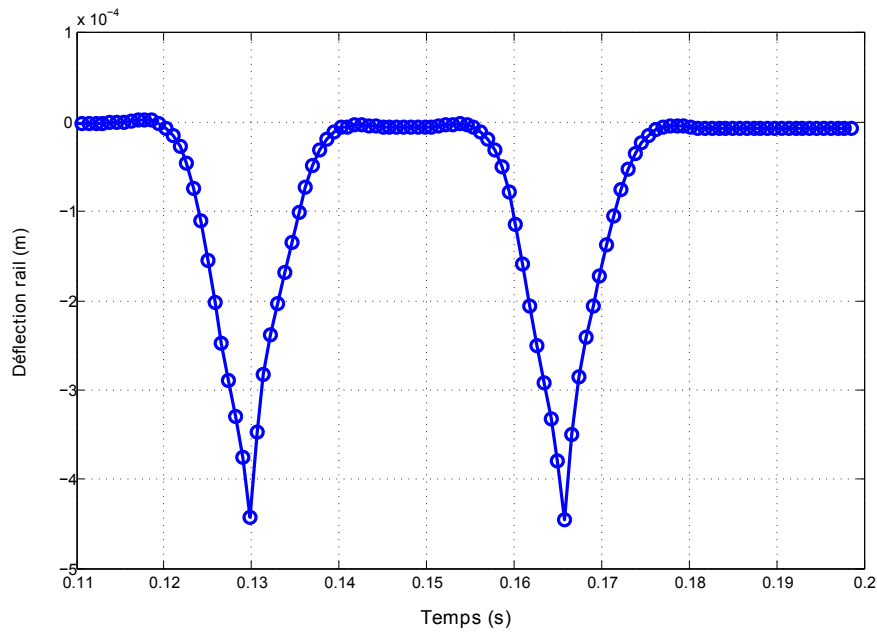


FIGURE 2.16: Déplacements verticaux au niveau du rail.

### Calcul des accélérations

Le logiciel Cast3m ne fournissant pas directement les valeurs des accélérations, nous les avons calculées par différences finies à partir des vitesses. Les accélérations verticales et transversales sont ainsi comparées aux mesures d'accélérations effectuées sur le site de Beugnâtre (figure 2.17). Ces accélérations sont calculées au niveau de la 25<sup>ème</sup> traverse du modèle. Cette traverse est suffisamment éloignée

des extrémités du modèle pour s'affranchir des effets de bord.

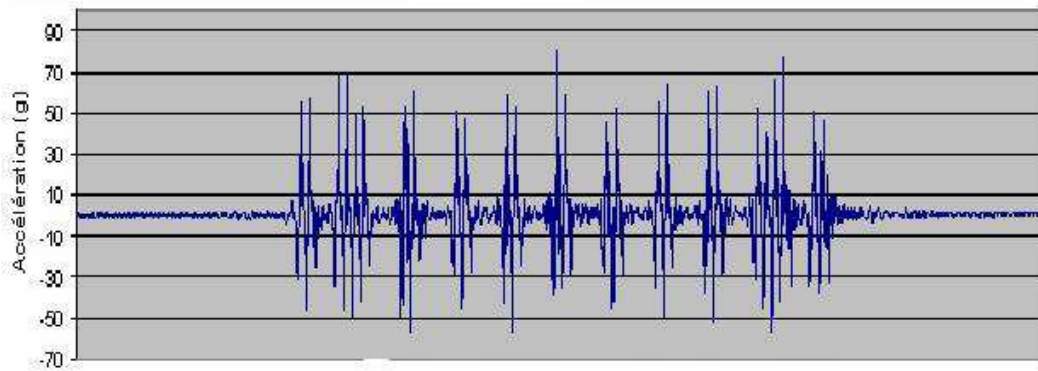


FIGURE 2.17: Accélérations verticales de traverse mesurées lors de passage d'une rame de TGV [105].

Afin de comparer les résultats issus de la modélisation numérique aux mesures, nous avons extrait les accélérations correspondant au passage du premier bogie d'une rame de TGV roulant à 303 km/h (figure 2.18).

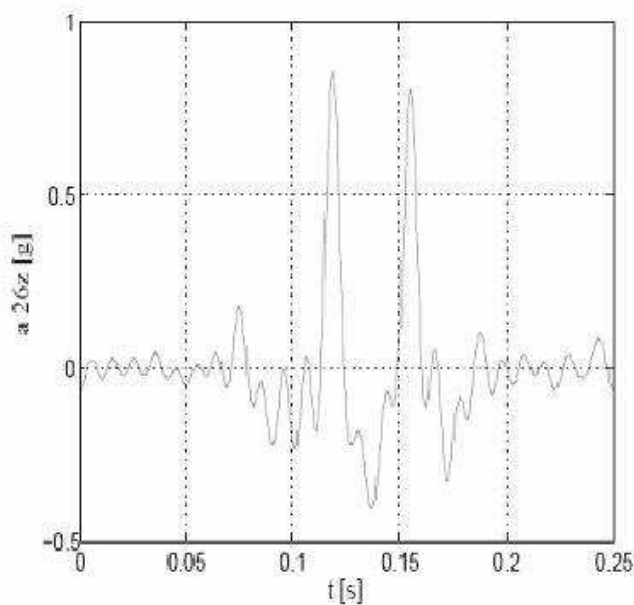


FIGURE 2.18: Accélérations verticales correspondant au passage du premier bogie mesurées sous les traverses [105].

Sur la figure 2.19, nous comparons les accélérations verticales mesurées à celles déduites des modèles Cast3m et Dynavoie. Les ordres de grandeur des pics d'accélération verticale ( $\% g$ ) positifs sont cohérents avec les mesures effectuées sur la voie Beugnâtre, où les pics d'accélération, au niveau des traverses, varient entre  $0,5 g$  et  $0,8 g$  (cf figure 2.17). Les valeurs négatives sont légèrement supérieures aux valeurs mesurées (variant autour de  $-0,4 g$  sur le site de Beugnâtre). L'écart entre les valeurs des déflexions aux points A, B et C sont respectivement de 10 %, 9 % et 3,5 %. Les résultats de Dynavoie sont dans les deux cas supérieurs aux valeurs mesurées et à celles obtenues à l'aide de Cast3M.

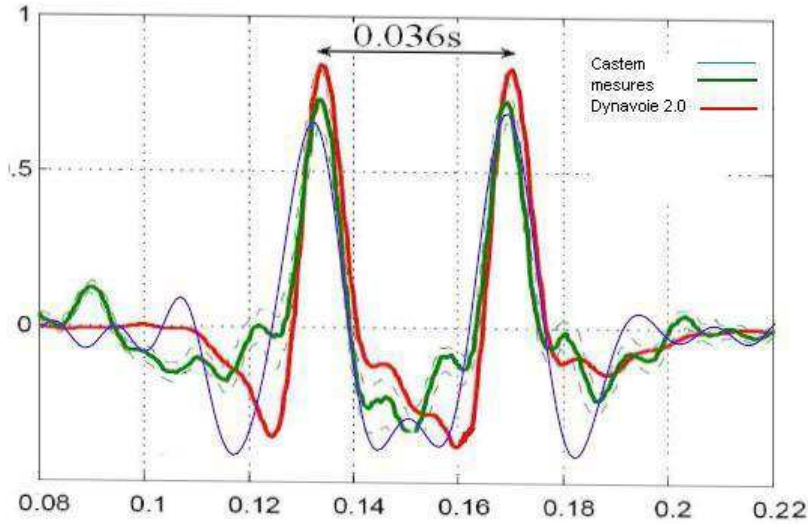


FIGURE 2.19: Accélérations verticales (%g) de la traverse 25.

## 2.6 Temps de calcul

L'introduction de la variabilité des paramètres mécaniques et géométriques de la structure ferroviaire nécessite d'effectuer un nombre important de calculs déterministes faisant appel au modèle EF. Le temps de calcul est un paramètre qui peut donc limiter les études ultérieures.

Certes un modèle 3D serait plus précis voire plus réaliste et plus riche en information concernant le comportement de la voie mais aussi très coûteux en temps de calculs. Des tests sur un modèle 3D ayant un maillage grossier et de même taille (50 traverses), ont nécessité 24 heures pour simuler le passage des charges [95]. De ce fait, nous avons choisi de développer un modèle 2D ; toutefois la taille du modèle (nombre de traverses) reste à définir.

Le modèle présenté dans ce chapitre est destiné à calculer des grandeurs caractérisant la dégradation de la structure sans être pénalisé par les problèmes liés à la réflexion d'ondes. Nous avons examiné l'effet de la taille du modèle sur un indicateur de dégradation de la voie ( $\tilde{N}L$ ) défini à partir des déflexions sous l'effet des charges appliquées à chaque instant de calcul. Le  $\tilde{N}L$  est l'écart-type des valeurs de l'écart, à chaque pas de calcul, entre la déflexion sous une roue et la moyenne des déflexions sous les trois autres roues, pour un modèle à 4 roues. Sur la figure 2.20 nous donnons l'évolution de cet indicateur en fonction du nombre de traverses prises en compte dans le modèle. Les temps de calcul enregistrés pour les différents calculs sont données sur la figure 2.21.

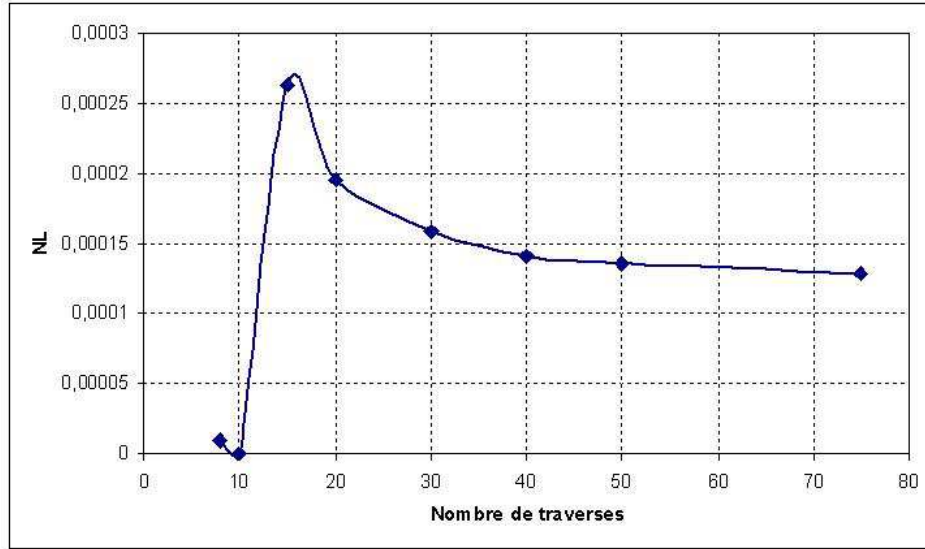


FIGURE 2.20: Evolution du  $\tilde{N}L$  en fonction du nombre de traverses du modèle.

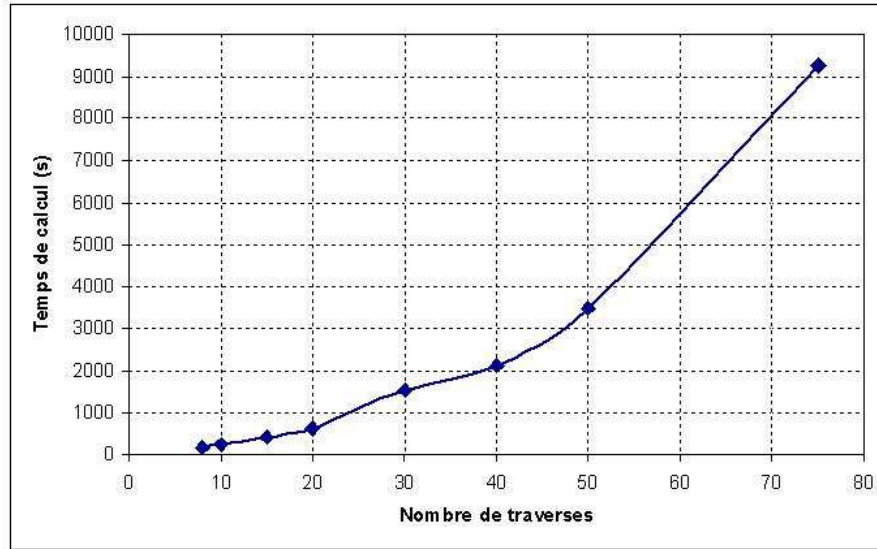


FIGURE 2.21: Evolution des temps de calcul en fonction du nombre de traverses du modèle.

Au vu des résultats obtenus, nous pensons qu'avec un modèle de 50 traverses, nous pouvons, en nous situant au milieu de celui-ci, minimiser les effets de bord, tout en conservant des temps de calculs raisonnables (40 minutes).

## 2.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre le modèle numérique développé pour analyser le comportement d'un tronçon de voie ferrée, élaboré en utilisant la méthode des éléments finis et le code Cast3M. Nous avons procédé à la validation du modèle vis-à-vis d'un certain nombre de critères (basés sur des résultats numériques et des mesures *in situ*). Les résultats des tests de validation se sont révélés satisfaisants, que ce soit en statique ou en dynamique. Les amplitudes des déflexions et des accélérations sont proches des valeurs expérimentales et des valeurs obtenues à l'aide des modèles CESAR-LCPC et

Dynavoie.

En vue d'une analyse stochastique, les temps de calculs restent l'inconvénient majeur comme pour tous les modèles de grande taille, c'est pourquoi le choix d'un modèle 2D s'est imposé. Pour le modèle présenté dans ce chapitre, le temps de calcul est de l'ordre de 40 minutes et est acceptable pour l'étude probabiliste envisagée.



## Chapitre 3

# Analyse probabiliste du comportement de la voie ferrée

### 3.1 Introduction

Dans le but de prendre en compte la variabilité des caractéristiques de la voie ferrée, nous avons proposé, dans le premier chapitre, une méthodologie de traitement des mesures *in situ* permettant de décrire la variabilité de ces paramètres ainsi que d'alimenter un modèle éléments finis développé et validé dans le chapitre 2, caractérisant le comportement d'une portion de voie. Le choix de la ou des méthodes permettant la prise en compte de la variabilité reste aussi une tâche importante. Ce choix devient difficile du fait de la multitude de méthodes existantes en terme de modélisation stochastique ainsi que de l'adaptation de ces méthodes au type d'analyse désirée. L'objectif de ce travail est de quantifier l'incertitude qui entache la réponse du modèle de voie ainsi que d'effectuer une analyse fiabiliste de cette réponse.

Dans ce chapitre nous présentons la méthode de collocation stochastique, permettant de prendre en compte la variabilité dans le modèle de voie ferrée et nous analyserons sa convergence, sa sensibilité au choix du type de loi et à la corrélation statistique entre les variables aléatoires prises en compte. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présentons les notions de base de l'analyse fiabiliste et les outils couramment utilisés dans ce contexte permettant la détermination du point de conception tels que les méthodes FORM et SORM.

### 3.2 Modélisation probabiliste des paramètres

L'étude de l'effet des incertitudes affectant les paramètres d'un modèle physique sur la variabilité de sa réponse, nécessite de modéliser ces paramètres par des grandeurs probabilistes. Les paramètres incertains d'un modèle mécanique peuvent être modélisés :

- soit par des variables aléatoires (v.a.),
- soit par des champs aléatoires.

Dans le cadre de ce travail, nous nous sommes limités à une modélisation par variables aléatoires. Ce choix est lié aux données disponibles et à la méthode retenue pour l'analyse stochastique de la portion de voie.

Rappelons qu'une v.a. à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  est une application mesurable d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  dans l'espace mesurable  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ , où  $\Omega$  est un ensemble abstrait,  $\mathcal{F}$  est une tribu sur  $\Omega$ ,  $\mathbb{P}$  est une probabilité sur  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{B}_n$  est la tribu borélienne de  $\mathbb{R}^n$ . Une telle v.a. est complètement caractérisée par sa loi  $P_X$  qui est une probabilité sur  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ . Généralement, et c'est ce que nous supposons dans toute la suite, cette loi admet une densité  $p_X$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $dx$  sur  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$

(i.e.  $P_X(dx) = p_X dx$ ), qui est la densité de probabilité de  $X$ .

### 3.3 Modélisation probabiliste du comportement de la voie ferrée

Comme mentionné au §2.4 (Eq. 2.1), le comportement dynamique d'une portion de voie ferrée est décrit par un modèle EF nonlinéaire s'écrivant :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbb{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \boldsymbol{\xi}(t), t) = \mathbf{0} , & t > 0 \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 , \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{cases}$$

équation que l'on peut réécrire comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \boldsymbol{\xi}(t), t, \mathbf{y}) = \mathbf{0} , & t > 0 \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 , \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{H} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t, \mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t, \mathbf{s})$  est une fonction de  $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^8$  dans  $\mathbb{R}^l$  telle que,  $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+$  :

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t, \mathbf{y}) = \mathbb{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t) \quad (3.2)$$

et  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^8$  est le vecteur des paramètres incertains, supposés être représentés par des v.a..

Le vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$  est le modèle probabiliste de  $\mathbf{y}$ . La solution  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}(t), t \in \mathbb{R}_+)$  de l'équation (3.1) est une fonction déterministe à valeurs dans  $\mathbb{R}^l$  dépendant de  $\mathbf{y}$ . Par conséquent, lorsque  $\mathbf{y}$  est modélisé par  $\mathbf{Y}$ , cette fonction devient un processus aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^l$  noté par la suite  $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}(t), t \in \mathbb{R}_+)$ . Ce processus est le modèle aléatoire de  $\mathbf{q}$  associé au modèle probabiliste  $\mathbf{Y}$  de  $\mathbf{y}$ .

#### Description du problème

Le comportement mécanique aléatoire de la voie ferrée est décrit par un modèle éléments finis stochastiques (EFS) s'écrivant :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{Q}}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{Q}(t), \dot{\mathbf{Q}}(t), \boldsymbol{\xi}(t), t, \mathbf{Y}) = \mathbf{0} , & t > 0 \\ \mathbf{Q}(0) = \mathbf{q}_0 , \quad \dot{\mathbf{Q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \\ \mathbf{Z}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{Q}(t)) , & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}(t) = (Q_1(t), \dots, Q_l(t))^T, t \in \mathbb{R}_+)$  est un processus à valeurs dans  $\mathbb{R}^l$ ,  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), \dots, Z_d(t))^T, t \in \mathbb{R}_+)$  est un processus aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{H}$  est un champs de vecteurs déterministes défini sur  $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^l$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  est une fonction déterministe définie sur  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^l$ ,  $l$ ,  $p$  et  $d$  sont des entiers  $\geq 1$  tels que  $d \leq l$ ,  $\mathbf{q}_0$  et  $\dot{\mathbf{q}}_0$  sont des vecteurs déterministes de  $\mathbb{R}^l$ , et  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)^T$  est un vecteur aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ . Les fonctions  $\mathbf{H}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  et  $\mathbf{g}$  et les vecteurs  $\mathbf{q}_0$  et  $\dot{\mathbf{q}}_0$  sont donnés. La loi de  $\mathbf{Y}$  est connue. Ce vecteur aléatoire est la représentation mathématique des paramètres incertains du modèle.

La fonction  $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}(t), t \in \mathbb{R}_+)$  et le processus stochastique  $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}(t), t \in \mathbb{R}_+)$  représentent respectivement le chargement nodal extérieur (i.e. les entrées) et les déplacements nodaux du modèle ; le processus stochastique  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}(t), t \in \mathbb{R}_+)$  représente soit des déplacements nodaux particuliers soit des caractéristiques géométriques ou mécaniques liées au comportement dynamique de la structure. C'est la sortie ou la réponse du système dynamique.

Connaissant le vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$ , les conditions initiales  $\mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0$  et les fonctions déterministes  $\boldsymbol{\xi}$ ,  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{g}$ , le problème est alors d'estimer les statistiques de second ordre du processus  $\mathbf{Z}$  : sa moyenne  $\mathbf{m}_Z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d : t \rightarrow \mathbf{m}_Z(t) = \mathbb{E}[\mathbf{Z}(t)]$  et sa fonction de corrélation  $\mathbf{R}_Z : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d} : s, t \rightarrow \mathbf{R}_Z(s, t) = \mathbb{E}[\mathbf{Z}(s)\mathbf{Z}^T(t)]$ , où  $\mathbb{E}[\cdot]$  est l'espérance mathématique, d'où le problème à résoudre :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{Q}}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{Q}(t), \dot{\mathbf{Q}}(t), \boldsymbol{\xi}(t), t, \mathbf{Y}) = 0, & t > 0 \\ \mathbf{Q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{Q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \\ \mathbf{Z}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{Q}(t)), & t \geq 0 \\ \mathbf{m}_\mathbf{Z}(t) = \mathbb{E}[\mathbf{Z}(t)], & t \geq 0 \\ \mathbf{R}_\mathbf{Z}(s, t) = \mathbb{E}[\mathbf{Z}(s)\mathbf{Z}^T(t)], & s \geq 0, t \geq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

### 3.3.1 Choix des paramètres aléatoires et de leurs lois

Dans cette étude, les paramètres incertains du modèle EF sont les épaisseurs et les modules d'Young de chacune des quatre couches qui composent la structure de la voie ferrée. Ces paramètres, respectivement désignés par  $h_b$ ,  $E_b$  pour le ballast,  $h_{sb}$ ,  $E_{sb}$  pour la sous-couche,  $h_f$ ,  $E_f$  pour la couche de forme et  $h_l$ ,  $E_l$  pour la couche de sol naturel, sont modélisés par des v.a. et la notation suivante sera retenue pour la suite :

$$\begin{cases} Y_1 = h_b, & Y_2 = h_{sb}, & Y_3 = h_f, & Y_4 = h_l \\ Y_5 = E_b, & Y_6 = E_{sb}, & Y_7 = E_f, & Y_8 = E_l \end{cases} \quad (3.5)$$

La v.a.  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_8)^T$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^8$  est le modèle mathématique des paramètres incertains. Sa loi est inconnue *a priori*. Cependant, l'analyse statistique des données des mesures *in situ* présentée dans le chapitre 1 a montré que chaque  $Y_k$ , supposé indépendant des autres paramètres, peut être assimilé à une v.a. distribuée suivant une loi lognormale. Par extension,  $\mathbf{Y}$  sera supposée lognormale et à composantes indépendantes.

La moyenne  $m_{Y_i}$  et l'écart-type  $\sigma_{Y_i}$  de chaque v.a.  $Y_i$  sont donnés dans le tableau 3.1. Ces valeurs sont issues des mesures *in situ* effectuées sur le site de Chambéry.

Couche	Epaisseur [m]		Module de Young [MPa]	
	$m_{Y_i}$	$\sigma_{Y_i}$	$m_{Y_i}$	$\sigma_{Y_i}$
ballast	0,26	0,11	38,9	11,2
sous couche	0,64	0,25	26,5	18,2
couche de forme	0,97	0,59	9,2	5,8
limons	1,62	0,69	10,7	8,6

TABLE 3.1: Moyennes et écarts-types des v.a.  $Y_i$ .

### 3.3.2 Variables de contrôle

Une variable de contrôle est une v.a.  $M$  (généralement scalaire) associée à une observation scalaire ou vectorielle  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}(t), t \in \mathbb{R}_+)$  du processus "réponse"  $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}(t), t \in \mathbb{R}_+)$ , et qui joue un rôle important dans le contrôle (d'où le nom) de la fiabilité de la structure. Il est donc important de connaître sa densité de probabilité ou au moins certains de ses moments statistiques : moyenne, variance, coefficients d'asymétrie et d'aplatissement, etc.

Pour la problématique considérée (analyse fiabiliste du comportement d'une portion de voie ferrée), quatre variables de contrôle ont été sélectionnées :

- le maximum de la déflexion au cours de la période de l'étude  $T$ , au niveau de la 25<sup>ème</sup> traverse :  $S_d$  ;
- le maximum de l'accélération sous la 25<sup>ème</sup> traverse :  $S_a$  ;
- le maximum de la déflexion du rail au point milieu du modèle géométrique :  $R_d$  ;
- l'indicateur de nivellement :  $\tilde{N}L$ , défini au paragraphe 2.6 du chapitre précédent.

Le choix de ces paramètres est lié à leur possibilité de mesure *in situ* dans le cadre d'un contrôle de qualité de la voie. Ils sont liés au champ de déplacement  $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}(t), t \in \mathbb{R}_+)$  régi par le modèle EF, et plus précisément à l'observation  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}(t), t \in \mathbb{R}_+)$  de ce champs définie précédemment. Ce sont des v.a. que nous noterons dorénavant comme suit :

$$M_1 = S_d, \quad M_2 = S_a, \quad M_3 = R_d, \quad M_4 = \tilde{N}L \quad (3.6)$$

### 3.4 Méthode des Éléments Finis Stochastiques

Les moyens de calcul modernes autorisent l'utilisation de modèles numériques, et notamment de modèles éléments finis (EF), de plus en plus sophistiqués pour l'étude des problèmes mécaniques déterministes. Toutefois la mise en œuvre de ces modèles EF représente des inconvénients notables. En effet, la complexité des modèles s'accompagne généralement d'une augmentation du nombre de paramètres. Ces paramètres sont souvent entachés d'incertitude qu'il convient de prendre en compte dans les modèles pour en évaluer l'impact sur les réponses. La théorie des probabilités est alors utile afin de décrire la propagation de cette incertitude.

Dans le domaine de la mécanique aléatoire, deux grandes classes de méthodes numériques sont principalement utilisées : les méthodes de Monte-Carlo (MC) et les méthodes des éléments finis stochastiques (MEFS). La pertinence des méthodes de Monte-Carlo est évidente [96, 6, 97]. Elles ont une très grande popularité depuis plus d'un demi-siècle et continuent aujourd'hui de jouer le rôle de méthodes de référence dans de nombreux domaines scientifiques. Depuis une vingtaine d'années, les méthodes des éléments finis stochastiques (MEFS) connaissent un succès croissant, comme en témoignent les innombrables ouvrages qui leurs sont consacrés [11, 101].

La méthode proposée ici pour analyser le comportement aléatoire de la voie ferrée appartient à cette catégorie de méthodes. Conçue pour calculer les moments statistiques des variables de contrôle liées au processus réponse, elle est basée sur une procédure de collocation stochastique destinée à réduire les temps de calcul tout en assurant des résultats de qualité. Cette méthode a été présentée initialement par Baroth et al [11] dans un contexte statique puis généralisée par Bressollette et al [19]. Elle est utilisée ici dans un contexte dynamique.

#### 3.4.1 Simulations de Monte-Carlo

Les méthodes de simulation de type Monte-Carlo sont des méthodes entièrement numériques consistant à estimer statistiquement les caractéristiques cherchées de la réponse aléatoire à partir de réalisations de cette dernière, obtenues en simulant les paramètres aléatoires à partir de leur loi conjointe et en résolvant, pour chaque réalisation simulée de ces derniers, l'équation différentielle vectorielle déterministe obtenue.

Leur avantage majeur est l'étendue de leur champ d'applications : elles fonctionnent sous des hypothèses très faibles et s'appliquent, du moins en théorie, à toutes les situations pratiques. Leur inconvénient est leur lenteur de convergence qui nécessite un grand nombre de tirages (et donc de résolutions de problèmes différentiels déterministes) et conduit dans certains cas à des temps de calcul rédhibitoires.

#### 3.4.2 Méthode de collocation stochastique

Afin de résoudre le problème décrit par l'Eq.(3.4) nous utilisons la méthode de collocation stochastique. Nous décrivons ci-dessous les étapes suivies pour résoudre ce problème.

## Méthode de résolution

La première étape de la méthode de résolution proposée est de réécrire l'équation (3.4) dans un contexte gaussien en exprimant la v.a. vectorielle  $\mathbf{Y}$  comme fonction d'une v.a. gaussienne, ce qui est toujours possible. En effet, si  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$  est un vecteur aléatoire gaussien à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ , il est toujours possible (à l'exception de quelques cas pathologiques) de trouver une transformation régulière  $\mathbf{T}$  telle que  $\mathbf{Y} = \mathbf{T}(\mathbf{X})$ . Par conséquent, en posant  $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t, \mathbf{T}(\mathbf{x})) = \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t, \mathbf{x})$  pour tout  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}, t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ , le problème à résoudre prend la nouvelle forme :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{Q}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{Q}(t), \dot{\mathbf{Q}}(t), \boldsymbol{\xi}(t), t, \mathbf{X}) = 0, & t > 0 \\ \mathbf{Q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{Q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \\ \mathbf{Z}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{Q}(t)), & t \geq 0 \\ \mathbf{m}_{\mathbf{Z}}(t) = \mathbb{E}[\mathbf{Z}(t)], & t \geq 0 \\ \mathbf{R}_{\mathbf{Z}}(s, t) = \mathbb{E}[\mathbf{Z}(s)\mathbf{Z}^T(t)], & s \geq 0, t \geq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Notons que, dans l'équation (3.7), le processus solution  $\mathbf{Q}$  et le processus réponse  $\mathbf{Z}$  peuvent être considérés comme des fonctions de  $t$  et de  $\mathbf{X}$ , ce que l'on écrira :

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{X}), \quad \mathbf{Z}(t) = \mathbf{G}(t, \mathbf{X}) \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{r} = (\mathbf{r}(t, \mathbf{x}), t \in \mathbb{R}_+, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p)$  et  $\mathbf{G} = (\mathbf{G}(t, \mathbf{x}), t \in \mathbb{R}_+, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p)$  sont des fonctions déterministes de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^p$  dans respectivement  $\mathbb{R}^l$  et  $\mathbb{R}^d$ , avec :

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}(t, \mathbf{x})) \quad (3.9)$$

Le problème (3.7) est résolu en utilisant une procédure de collocation stochastique [11, 19]. L'idée est, pour tout  $t$  fixé dans  $\mathbb{R}_+$ , d'approximer la fonction  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{r}(t, \mathbf{x})$  de la manière suivante :

$$\mathbf{r}(t, \mathbf{x}) \simeq \tilde{\mathbf{r}}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_p=0}^{n_p} \mathbf{r}_{j_1 \dots j_p}(t) L_{n_1, j_1}(x_1) \times \dots \times L_{n_p, j_p}(x_p) \quad (3.10)$$

où  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$  est le point générique de  $\mathbb{R}^p$ ,  $n_1, \dots, n_p$  sont  $p$  entiers positifs,  $\{\mathbf{r}_{j_1 \dots j_p}(t), 0 \leq j_k \leq n_k, 1 \leq k \leq p\}$  sont  $(n_1 + 1) \times \dots \times (n_p + 1)$  vecteurs de  $\mathbb{R}^l$ ,  $\{\mathbf{x}_j = (x_{1, j_1}, \dots, x_{p, j_p}), 0 \leq j_k \leq n_k, 1 \leq k \leq p\}$  sont les points de collocation associés aux entiers  $n_1, \dots, n_p$  et à la densité de probabilité  $\Psi = (\Psi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d)$  de  $\mathbf{X}$ , telle que :

$$\begin{cases} \Psi(\mathbf{x}) = (\otimes_{1 \leq k \leq p} \Psi_k)(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^p \Psi_k(x_k), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \\ \Psi_k(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}, \quad x_k \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq k \leq p \end{cases} \quad (3.11)$$

et,  $\forall k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\{L_{n_k, j_k}, 0 \leq j_k \leq n_k\}$  sont les polynômes de Lagrange d'ordre  $n_k$  associés aux points  $\{x_{k, j_k}, 0 \leq j_k \leq n_k\}$ .

Pour évaluer les fonctions inconnues  $\mathbf{r}_{j_1 \dots j_p} = ((\mathbf{r}_{j_1 \dots j_p}(t), t \in \mathbb{R}_+), 0 \leq j_k \leq n_k, 1 \leq k \leq p)$ , on utilise la stratégie suivante :

1. on considère les équations différentielles déterministes :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{h}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \boldsymbol{\xi}(t), t, \mathbf{x}) = 0, & t > 0 \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{cases} \quad (3.12)$$

issues des deux premières équations du système (3.7) en remplaçant  $\mathbf{X}$  par la variable déterministe  $\mathbf{x}$  (i.e. on "gèle"  $\mathbf{X}$  à la valeur  $\mathbf{x}$ ),

2. on cherche pour Eq.(3.12) une solution de la forme :

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_p=0}^{n_p} \mathbf{r}_{j_1 \dots j_p}(t) L_{n_1, j_1}(x_1) \times \dots \times L_{n_p, j_p}(x_p) \quad (3.13)$$

3. insérant Eq.(3.13) dans Eq.(3.12), puis posant  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j = (x_{1,j_1}, \dots, x_{p,j_p})$  et utilisant la propriété d'orthogonalité des polynômes de Lagrange  $L_{n_k, j_k}(x_{k, j_l}) = \delta_{j_k j_l}$ , on obtient l'équation satisfaite par chaque fonction  $\mathbf{r}_{j_1 \dots j_p}$ , pour  $0 \leq j_k \leq n_k$  et  $1 \leq k \leq p$  :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_j(t) + \mathbf{h}(\mathbf{r}_j(t), \dot{\mathbf{r}}_j(t), \boldsymbol{\xi}(t), t, \mathbf{x}_j) = 0, & t > 0 \\ \mathbf{r}_j(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}_j(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

où nous avons posé  $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{j_1, \dots, j_p}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_j = \dot{\mathbf{r}}_{j_1, \dots, j_p}$  et  $\ddot{\mathbf{r}}_j = \ddot{\mathbf{r}}_{j_1, \dots, j_p}$ .

Après résolution de ces  $(n_1 + 1) \times \dots \times (n_p + 1)$  équations différentielles déterministes, les  $(n_1 + 1) \times \dots \times (n_p + 1)$  fonctions  $\{\mathbf{r}_{j_1, \dots, j_p}, 0 \leq j_k \leq n_k, 1 \leq k \leq p\}$  sont connues et l'approximation (3.10) est entièrement déterminée.

En utilisant ce résultat et l'Eq.(3.9), on peut alors approximer la fonction  $\mathbf{G}$  comme suit :

$$\mathbf{G}(t, \mathbf{x}) \simeq \tilde{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{r}}(t, \mathbf{x})) \quad (3.15)$$

avec  $\tilde{\mathbf{r}}(t, \mathbf{x})$  donné par Eq.(3.10).

La fonction  $\tilde{\mathbf{G}}$  est approximée à son tour par :

$$\tilde{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x}) \simeq \tilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{x}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_p=0}^{n_p} \mathbf{f}_{j_1 \dots j_p}(t) L_{n_1, j_1}(x_1) \times \dots \times L_{n_p, j_p}(x_p) \quad (3.16)$$

où,  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\{\mathbf{f}_{j_1, \dots, j_p}(t), 0 \leq j_k \leq n_k, 1 \leq k \leq p\}$  sont  $(n_1 + 1) \times \dots \times (n_p + 1)$  vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  calculés en écrivant l'équation (3.16) aux points de collocation  $\{\mathbf{x}_j = (x_{1, j_1}, \dots, x_{p, j_p}), 0 \leq j_k \leq n_k, 1 \leq k \leq p\}$  et en utilisant la propriété  $L_{n_k, j_k}(x_{k, j_l}) = \delta_{j_k j_l}$ . On obtient :

$$\mathbf{f}_{j_1 \dots j_p}(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{x}_j) \simeq \tilde{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x}_j) = \mathbf{g}(\mathbf{r}_{j_1 \dots j_p}(t)) \quad (3.17)$$

avec  $\mathbf{r}_{j_1, \dots, j_p}$  solution de Eq.(3.14).

En utilisant les équations (3.8), (3.15), (3.16) et (3.17), le processus  $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}(t), t \in \mathbb{R}_+)$  peut être approximé par le processus  $\tilde{\mathbf{Z}} = (\tilde{\mathbf{Z}}(t), t \in \mathbb{R}_+)$  tel que,  $\forall t \in \mathbb{R}_+$  :

$$\tilde{\mathbf{Z}}(t) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_p=0}^{n_p} \mathbf{g}(\mathbf{r}_{j_1 \dots j_p}(t)) L_{n_1, j_1}(X_1) \times \dots \times L_{n_p, j_p}(X_p) \quad (3.18)$$

Il en résulte que la moyenne  $\mathbf{m}_{\mathbf{Z}}$  et la fonction de corrélation  $\mathbf{R}_{\mathbf{Z}}$  de  $\mathbf{Z}$  peuvent être approximées par :

$$\mathbf{m}_{\mathbf{Z}}(t) \simeq \tilde{\mathbf{m}}_{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{m}_{\tilde{\mathbf{Z}}}(t) = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{Z}}(t)] = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_p=0}^{n_p} w_{j_1} \dots w_{j_p} \mathbf{g}(\mathbf{r}_{j_1 \dots j_p}(t)) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{Z}}(s, t) &\simeq \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{Z}}(s, t) = \mathbf{R}_{\tilde{\mathbf{Z}}}(s, t) = \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{Z}}(s) \tilde{\mathbf{Z}}^T(t)] \\ &= \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_p=0}^{n_p} w_{j_1} \dots w_{j_p} \mathbf{g}(\mathbf{r}_{j_1 \dots j_p}(s)) \mathbf{g}^T(\mathbf{r}_{j_1 \dots j_p}(t)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

où,  $\forall k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\{w_{j_k}, 0 \leq j_k \leq n_k\}$  sont les poids associés aux points de collocation  $\{x_{k, j_k}, 0 \leq j_k \leq n_k\}$  relatifs aux coordonnées  $X_k$  de  $\mathbf{X}$ , ces points étant les racines des polynômes de Gauss-Hermite  $H_{n_k+1}$  et les poids associés  $w_{j_k}$  étant solutions du système linéaire :

$$\sum_{j_k=0}^{n_k} w_{j_k} H_{i_k}(x_{j_k}) = \delta_{i_k 0}, \quad i_k = 0, \dots, n_k \quad (3.21)$$

Il est à noter que, connaissant l'approximation (3.18) de  $\mathbf{Z}$ , il est possible à l'aide de cette procédure d'estimer facilement les statistiques du second ordre de toute v.a. de contrôle liée à  $\mathbf{Z}$ . À titre d'exemple, supposons  $d = 1$  (par conséquent  $\mathbf{Z}$  est un processus scalaire) et considérons la v.a. scalaire suivante :

$$M = \max_{t \in T} \mathbf{Z}(t) \quad (3.22)$$

où  $T$  est un intervalle donné de  $\mathbb{R}_+$ . D'après (3.18) et en utilisant la méthode de collocation, la moyenne et la variance de  $M$  peuvent être alors approximées comme suit :

$$m_M = \mathbb{E}[M] \simeq \tilde{m}_M \quad (3.23)$$

$$V_M = \mathbb{E}[M^2] - m_M^2 \simeq \tilde{V}_M \quad (3.24)$$

avec :

$$\tilde{m}_M = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_p=0}^{n_p} w_{j_1} \dots w_{j_p} s_{j_1 \dots j_p} \quad (3.25)$$

$$\tilde{V}_M = \sum_{j_1=0}^{n_1} \dots \sum_{j_p=0}^{n_p} w_{j_1} \dots w_{j_p} s_{j_1 \dots j_p}^2 - \tilde{m}_M^2 \quad (3.26)$$

et  $\forall k \in \{1, \dots, p\}$  et  $\forall j_p \in \{0, \dots, n_p\}$  :

$$s_{j_1 \dots j_p} = \max_{t \in T} \mathbf{g}(\mathbf{r}_{j_1 \dots j_p}(t)) \quad (3.27)$$

où la fonction  $\mathbf{g}$  est dans ce cas à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Notons que cette méthode est non intrusive, contrairement à la méthode de perturbation, ce qui rend sa mise en œuvre numérique plus simple. De plus elle présente l'avantage sur cette dernière de permettre de prendre en compte des paramètres aléatoires à forte dispersion.

### 3.4.3 Analyse paramétrique

Nous procédons dans cette partie à une analyse de la convergence numérique des différents moments statistiques des paramètres de sortie obtenus par la MEFS retenue pour l'analyse stochastique du modèle de voie ferrée. Nous analysons aussi la sensibilité de la réponse du modèle au type de loi des paramètres aléatoires.

#### Convergence numérique de la MEFS

L'analyse de convergence de la MEFS utilisée a été montrée dans (Baroth et al. 2007) [11] pour des problèmes de mécanique statique non-linéaire. Le modèle traité ici est plus complexe de part son contexte dynamique, le nombre important d'éléments finis qu'il comporte ainsi que les temps de calculs importants qu'il nécessite (40 mn par calcul déterministe). Pour des raisons liées aux temps de calculs, cette analyse est menée en ne prenant en compte qu'une seule v.a..

Le but de cette étude est de déterminer le nombre minimum de points de collocation nécessaire (nombre d'appels au modèle EF) pour le calcul des différents moments statistiques et des densités de probabilité des variables de contrôle  $M_i$  (cf. Eq.(3.6)). Un nombre de points de collocation variant de 2 à 8 est considéré.

Les valeurs de référence pour ce type d'analyse sont les résultats des simulations de Monte-Carlo. Or les temps de calcul importants ont rendu la simulation de Monte-Carlo avec un nombre de réalisations important, non raisonnable. Nous avons choisi une simulation de Monte-Carlo avec un nombre de réalisations égal à 1000 tout en étudiant la convergence des deux premiers moments statistiques des variables de contrôle, afin de justifier le nombre de simulations choisi.

À titre indicatif, les figures 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 donnent, respectivement, les évolutions des moyennes et des l'écart-types des variables de contrôle  $M_1 = S_d$  et  $M_2 = S_a$  en fonction du nombre de simulations de Monte-Carlo pour un modèle EFS ayant comme variable entachée d'incertitude ( $Y_1 = h_b$ ) modélisée par une v.a. lognormale. On a remarqué pour cette variable, ainsi que pour les autres, une convergence des moyennes et des écart-types. Ces résultats nous permettent de conclure que 1000 simulations sont suffisantes pour l'estimation des deux premiers moments statistiques.

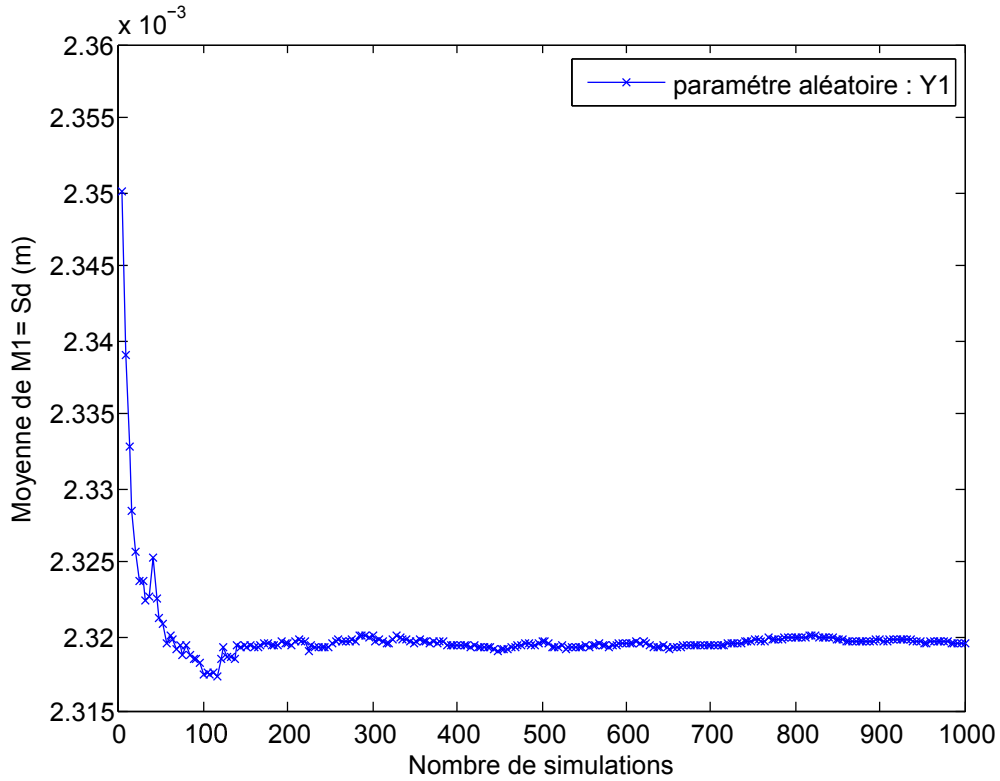


FIGURE 3.1: Evolution de la moyenne de la déflexion de la traverse ( $M_1 = S_d$ ) en fonction du nombre de simulations.



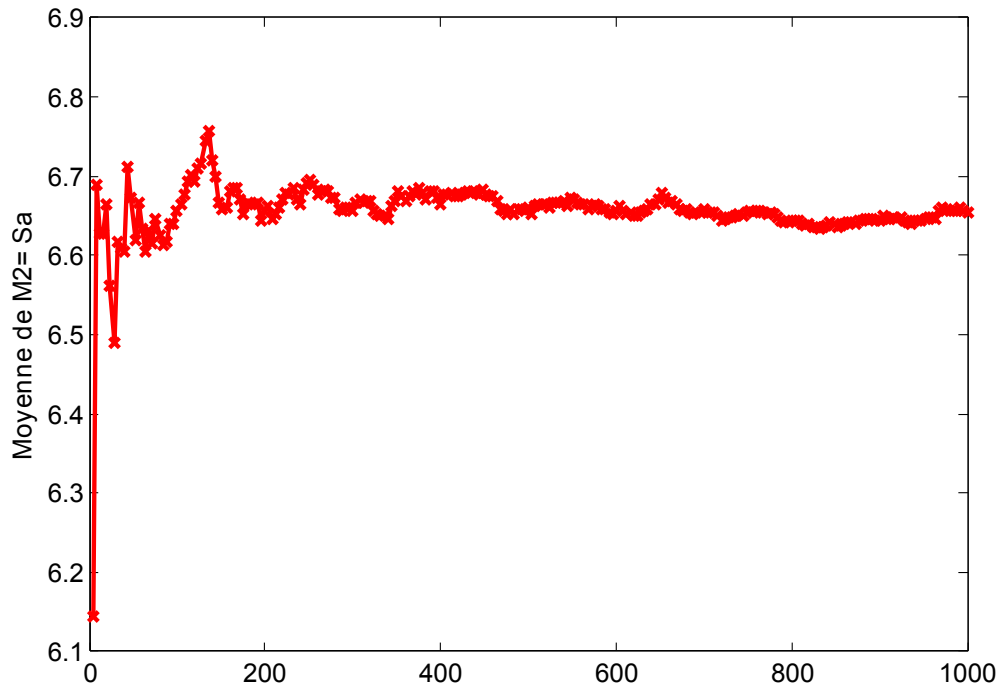


FIGURE 3.2: Evolution de la moyenne de l'accélération de la traverse ( $M_2 = S_a$ ) en fonction du nombre de simulations.

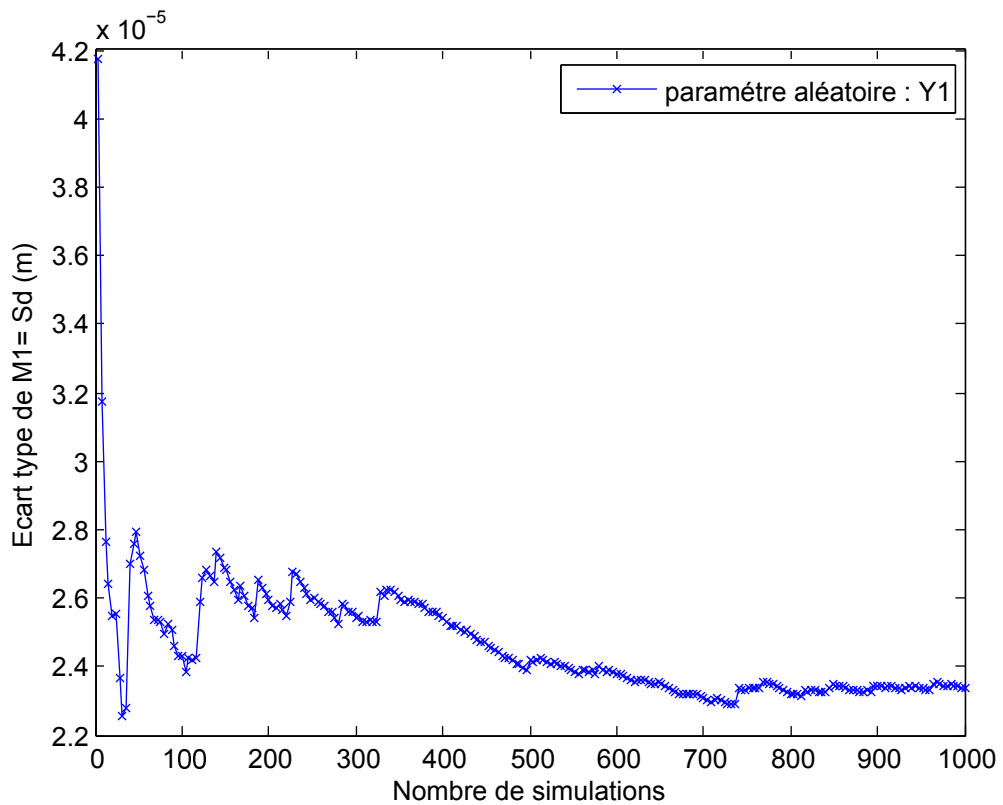


FIGURE 3.3: Evolution de l'écart-type de  $M_2 = S_a$  en fonction du nombre de simulations.

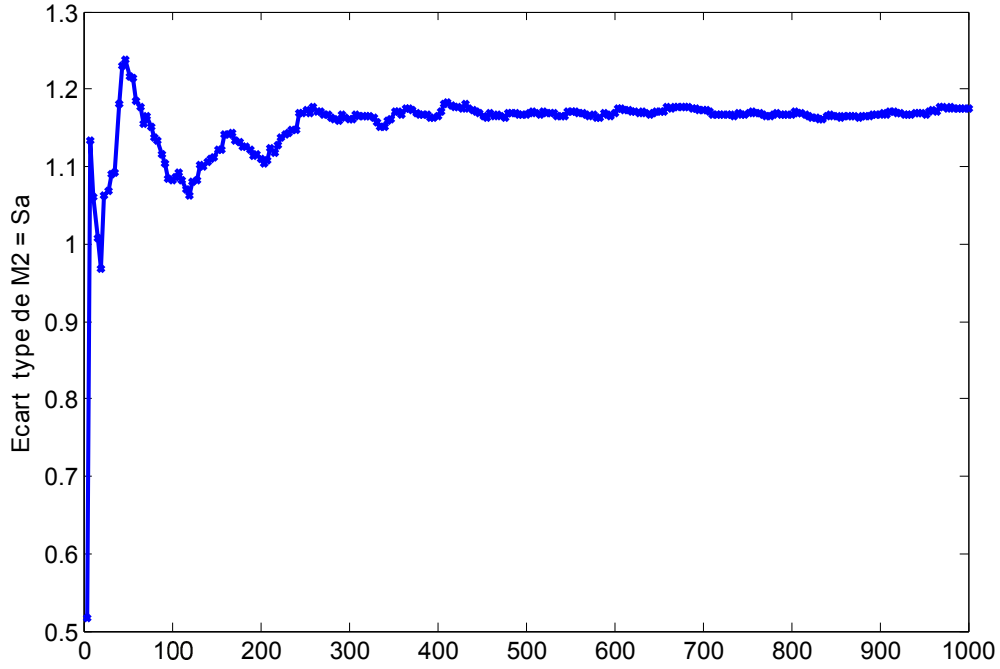


FIGURE 3.4: Evolution de l'écart-type de  $M_1 = S_d$  en fonction du nombre de simulations.

Afin d'analyser l'influence du type de paramètre aléatoire, nous avons étudié la convergence de la méthode de collocation pour deux types de v.a., le premier étant un paramètre géométrique (épaisseur de la couche de ballast :  $Y_1 = h_b$ ) et le second étant de nature mécanique (le module de Young de la sous-couche  $Y_6 = E_{sb}$ ). Pour les deux cas, la distribution du paramètre aléatoire a été considérée comme lognormale.

Les figures 3.5a et 3.5b montrent, respectivement et à titre d'exemple, les évolutions de la moyenne  $m_{M_1}$  et de l'écart-type  $\sigma_{M_1}$  de la déflexion de la traverse  $M_1 = S_d$  pour différents nombres de points de collocation et pour les deux paramètres aléatoires considérés.

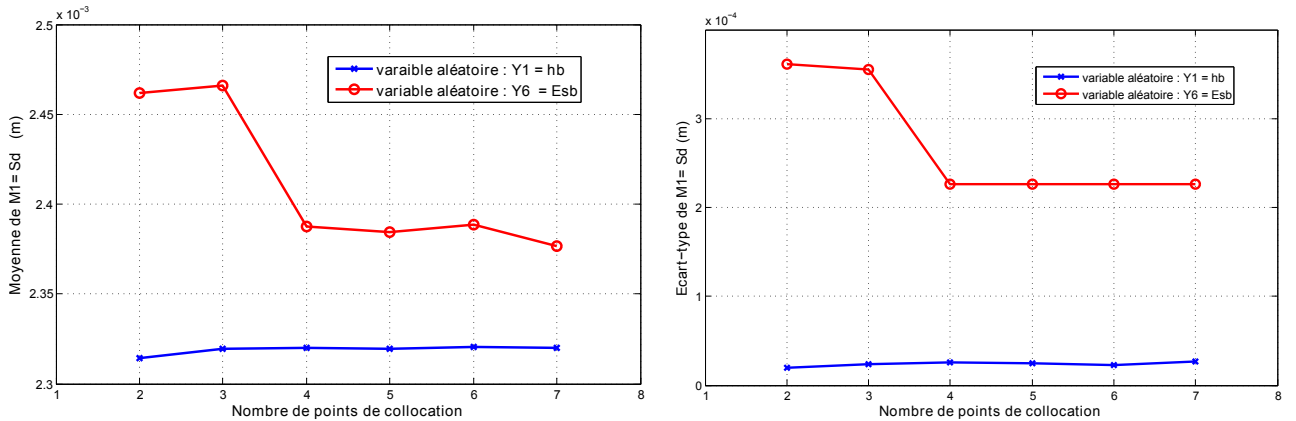


FIGURE 3.5: Evolution de la moyenne (gauche) et de l'écart-type (droite) de  $M_1 = S_d$  en fonction du nombre de points de collocation.

Nous jugeons qu'un nombre de points de collocation égal à 4 est suffisant pour avoir une bonne estimation des différents moments statistiques des différentes variables de sortie. Dans le tableau 3.2, nous comparons les moyennes  $m_{M_i}$  et écarts-types  $\sigma_{M_i}$  pour les différents paramètres de contrôle obtenus par la méthode de collocation et ceux issus des simulations de Monte-Carlo (1000 simulations).

La figure 3.6 montre les graphes des fonctions  $n_1 \rightarrow m_{M_1}(n_1)$  et  $n_1 \rightarrow \sigma_{M_1}(n_1)$  ainsi que les valeurs issues des simulations de Monte-Carlo (1000 simulations).

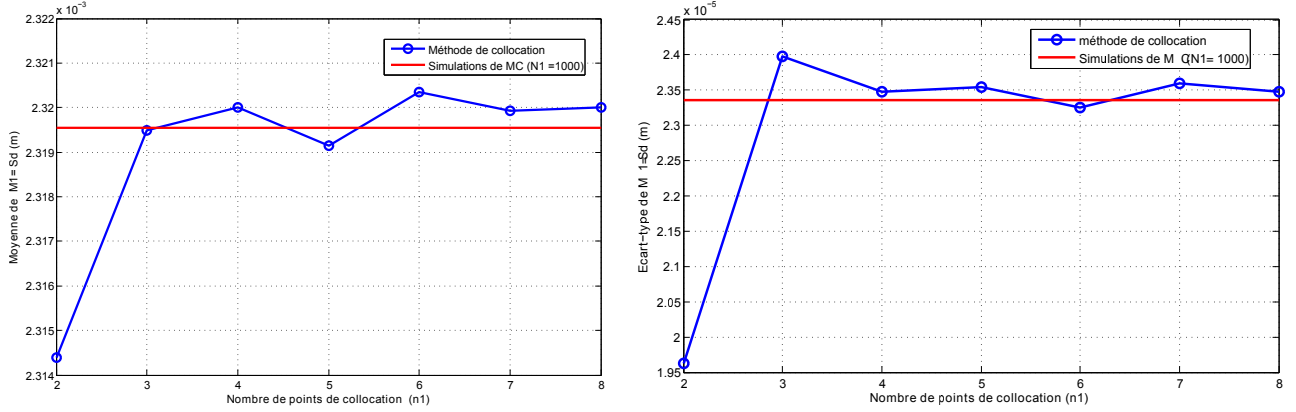


FIGURE 3.6: Convergence de l'estimation de la moyenne (gauche) et de l'écart-type (droite) de  $M_1 = S_d$  en fonction du nombre de points collocation.

	Méthode de collocation (4 points de collocation)		Méthode de Monte-Carlo (1000 réalisations)	
	$m_{M_i}$	$\sigma_{M_i}$	$m_{M_i}$	$\sigma_{M_i}$
$M_1 = S_d$	$2,320 \cdot 10^{-3}m$	$0,026 \cdot 10^{-3}m$	$2,320 \cdot 10^{-3}m$	$0,023 \cdot 10^{-3}m$
$M_2 = S_a$	$6,691 \text{ ms}^{-2}$	$1,692 \text{ ms}^{-2}$	$6,661 \text{ ms}^{-2}$	$1,173 \text{ ms}^{-2}$
$M_3 = R_d$	$2,581 \cdot 10^{-3}m$	$0,038 \cdot 10^{-3}m$	$2,580 \cdot 10^{-3}m$	$0,044 \cdot 10^{-3}m$
$M_4 = \widetilde{NL}$	$2,260 \cdot 10^{-4}m$	$0,114 \cdot 10^{-4}m$	$2,250 \cdot 10^{-4}m$	$0,112 \cdot 10^{-4}m$

TABLE 3.2: Moyennes ( $m_{M_i}$ ) et écarts-types ( $\sigma_{M_i}$ ) obtenus par la méthode de collocation et par simulations de Monte-Carlo pour les variables de contrôle  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  et  $M_4$ .

Ces résultats confirment les conclusions sur le nombre de points de collocation nécessaire pour l'estimation des moments statistiques. Sur la figure 3.7 est représentée la densité de probabilité de la v.a.  $M_1 = S_d$  obtenue via la méthode de collocation stochastique (avec 4 points de collocations) couplée avec une procédure de Monte-Carlo utilisant 10<sup>6</sup> tirages.

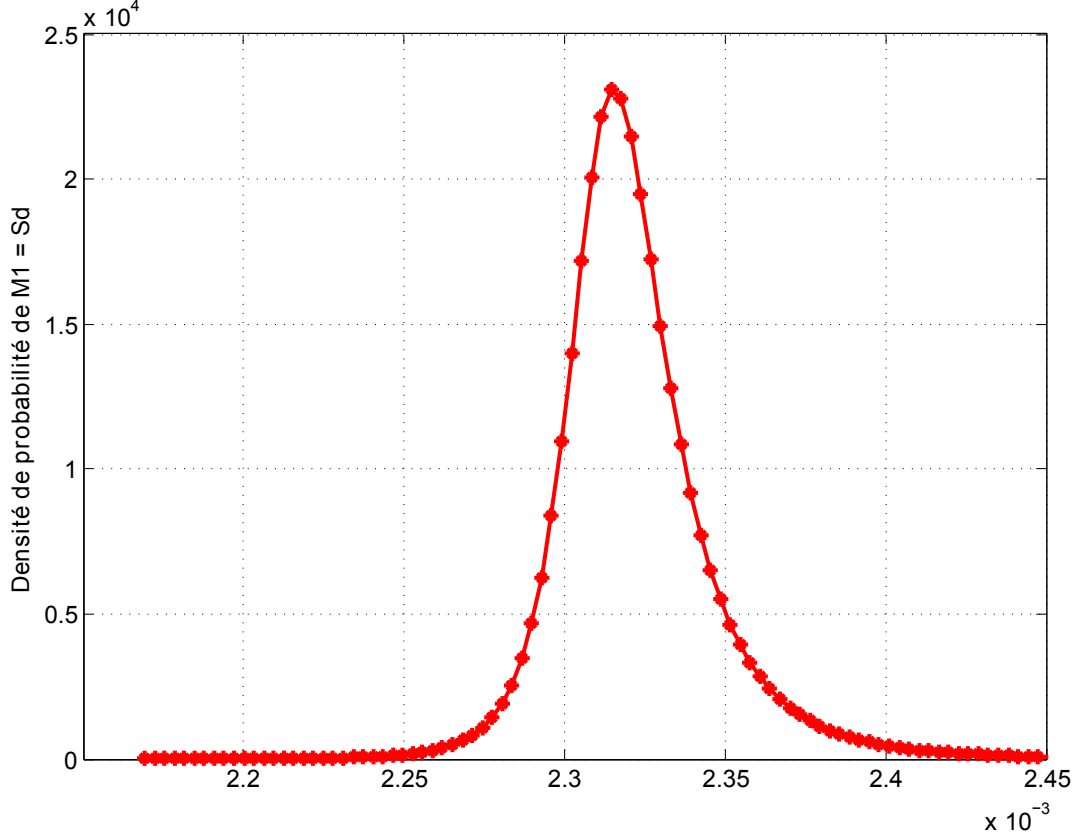


FIGURE 3.7: Densité de probabilité de  $M_1 = S_d$ .

### Influence de la distribution des paramètres aléatoires

Le but de cette étude est d'analyser la sensibilité du modèle numérique au type de loi de distribution des paramètres aléatoires. L'analyse statistique des mesures *in situ* a montré que ces derniers suivent majoritairement des distributions lognormales. Nous proposons de tester d'autres types de lois (normale et uniforme) afin d'analyser l'influence du type de loi sur les variables de contrôle. Pour cela, nous considérons un modèle ayant quatre variables aléatoires : l'épaisseur et le module de Young de la couche de ballast ( $Y_1 = h_b$  et  $Y_5 = E_b$ ) et ceux de la sous-couche ( $Y_2 = h_{sb}$  et  $Y_6 = E_{sb}$ ). Les autres paramètres sont supposés déterministes et égaux à leurs moyennes respectives.  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_5, Y_6)^T$  est composé de v.a. supposées indépendantes.

Nous analysons d'une part, l'effet du choix du type de loi de distribution des v.a. sur les moments statistiques de la variable de contrôle  $M_1 = S_d$  : sa moyenne  $m_{M_1} = \mathbb{E}[M_1]$ , son écart-type  $\sigma_{M_1} = (\mu_{M_1}^{(2)})^{1/2}$ , son coefficient d'asymétrie  $S_{M_1} = \mu_{M_1}^{(3)}/\sigma_{M_1}^3$  et son coefficient d'aplatissement  $K_{M_1} = (\mu_{M_1}^{(4)}/\sigma_{M_1}^4) - 3$ , où  $\mu_{M_1}^{(k)} = \mathbb{E}[(M_1 - m_{M_1})^k]$  est le moment centré d'ordre  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) de  $M_1$ .

D'autre part, nous nous intéresserons à l'effet de la troncature des lois de distribution des paramètres aléatoires qui se traduit en général par le fait d'imposer une borne inférieure et/ou supérieure aux distributions. Dans cette analyse, nous considérons le cas de distributions lognormales pour  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_5, Y_6)^T$ . Pour la troncature, deux choix sont considérés avec deux supports  $S(\mathbf{Y})$  différents :

- Choix 1 : 
$$\begin{cases} S(\mathbf{Y}) = S_1(\mathbf{Y}) = S_1(Y_1) \times S_1(Y_2) \times S_1(Y_5) \times S_1(Y_6) \\ S_1(Y_j) = [0, b_{j,1}] , \quad b_{j,1} = 3\sigma_{Y_j} , j \in \{1, 2, 5, 6\} \end{cases} \quad (3.28)$$

- Choix 2 : 
$$\begin{cases} S(\mathbf{Y}) = S_2(\mathbf{Y}) = S_2(Y_1) \times S_2(Y_2) \times S_2(Y_5) \times S_2(Y_6) \\ S_2(Y_j) = [0, b_{j,2}] , \quad b_{j,2} = 6\sigma_{Y_j} , j \in \{1, 2, 5, 6\} \end{cases} \quad (3.29)$$

où  $\sigma_{Y_j}$  est l'écart-type de la composante  $Y_j$  de  $\mathbf{Y}$  et  $S_1(Y_j)$  (resp.  $S_2(Y_j)$ ) représente le support de troncature de la distribution lognormale de  $Y_j$  associé à l'alternative 1 (resp. 2). Les valeurs des moyenne  $m_{Y_j}$  et l'écart-type  $\sigma_{Y_j}$  de  $Y_j$ , pour  $j \in \{1, 2, 5, 6\}$ , sont données dans le tableau 3.1.

Notons que la transformation  $\mathbf{T}$  évoquée dans le paragraphe 3.4.2, en supposant les composantes de  $\mathbf{Y}$  comme indépendantes, prend ici la forme particulière suivante :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}(\mathbf{X}) \Leftrightarrow \begin{cases} Y_1 = T_1(\mathbf{X}) = t_1(X_1) \\ Y_2 = T_2(\mathbf{X}) = t_2(X_2) \\ Y_5 = T_5(\mathbf{X}) = t_5(X_5) \\ Y_6 = T_6(\mathbf{X}) = t_6(X_6) \end{cases} \quad (3.30)$$

où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_5, X_6)^T$  est formé de v.a. gaussiennes standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^4$  (c.a.d, les v.a.  $X_j$ ,  $j \in \{1, 2, 5, 6\}$ , sont indépendantes et chaque  $X_j$  est une v.a. gaussienne à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ),  $T_j$ ,  $j \in \{1, 2, 5, 6\}$ , est la  $j$ -ème coordonnée de  $\mathbf{T}$ , et  $t_j$ ,  $j \in \{1, 2, 5, 6\}$ , est une trajectoire de  $\mathbb{R}$  vers  $S(Y_j) \subseteq \mathbb{R}$ , où  $S(Y_j)$  est le support de la distribution de  $Y_j$ . Nous donnons dans ce qui suit l'expression de la transformation  $Y_j = t_j(X_j)$  pour les distributions considérées de  $Y_j$ .

- $Y_j$  suit une distribution uniforme :

$$Y_j \sim U(m_{Y_j}, \sigma_{Y_j}^2) \Rightarrow Y_j = t_j(X_j) = a_j + (b_j - a_j)\Phi(X_j) \quad (3.31)$$

avec :

$$a_j = m_{Y_j} - \sqrt{3}\sigma_{Y_j} \quad , \quad b_j = m_{Y_j} + \sqrt{3}\sigma_{Y_j} \quad (3.32)$$

$\Phi$  est la fonction de densité de probabilité de la distribution gaussienne standard donnée par :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.33)$$

et  $[a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$  est le support de la distribution.

- $Y_j$  suit une distribution gaussienne :

$$Y_j \sim N(m_{Y_j}, \sigma_{Y_j}^2) \Rightarrow Y_j = t_j(X_j) = m_{Y_j} + \sigma_{Y_j}X_j \quad (3.34)$$

- $Y_j$  suit une distribution lognormale :

$$Y_j \sim LN(m_{Y_j}, \sigma_{Y_j}^2) \Rightarrow Y_j = t_j(X_j) = \exp(m_j + \sigma_j X_j) \quad (3.35)$$

où :

$$m_j = \ln\left(\frac{m_{Y_j}}{\sqrt{1 + (CV_{Y_j})^2}}\right) \quad , \quad \sigma_j = \sqrt{\ln(1 + (CV_{Y_j})^2)} \quad , \quad CV_{Y_j} = \frac{\sigma_{Y_j}}{m_{Y_j}} \quad (3.36)$$

- $Y_j$  suit une distribution lognormale tronquée de support  $[0, b_j]$ ,  $b_j > 0$  :

$$Y_j \sim LN(m_{Y_j}, \sigma_{Y_j}^2, [0, b_j]) \Rightarrow Y_j = t_j(X_j) = \exp\left(m_j + \sigma_j \Phi^{-1}(A_j \Phi(X_j))\right) \quad (3.37)$$

où  $(m_j, \sigma_j)$  est la solution du système non-linéaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{B_j}{A_j} e^{m_j + \frac{\sigma_j^2}{2}} = m_{Y_j} \\ \frac{A_j C_j}{B_j^2} e^{\sigma_j^2} = 1 + \left(\frac{\sigma_{Y_j}}{m_{Y_j}}\right)^2 \end{cases} \quad (3.38)$$

et :

$$A_j = \Phi\left(\frac{\ln b_j - m_j}{\sigma_j}\right) \quad , \quad B_j = \Phi\left(\frac{\ln b_j - m_j}{\sigma_j} - \sigma_j\right) \quad , \quad C_j = \Phi\left(\frac{\ln b_j - m_j}{\sigma_j} - 2\sigma_j\right) \quad (3.39)$$

Les valeurs des moments statistiques  $m_{M_1}$ ,  $\sigma_{M_1}$ ,  $S_{M_1}$  et  $K_{M_1}$  obtenues par la méthode de collocation pour les différentes distributions considérées de  $\mathbf{Y}$  sont données dans le tableau 3.4. Les figures 3.8 et 3.9 présentent les fonctions de densité de probabilité (couramment appelée pdf en anglais)  $p_{M_1}$  et  $p_{M_3}$  respectivement de  $M_1$  et  $M_3$ .

Les différents résultats montrent que le choix de la distribution de  $\mathbf{Y}$  a une grande influence sur la distribution de  $M_1$ . Cette conclusion est aussi vérifiée sur les autres variables de contrôle ( $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ ). Par conséquent, il sera important de bien choisir la distribution de  $\mathbf{Y}$  pour ce type d'application.

Notons que les distributions données sur la figure 3.8 et 3.9 sont des approximations de  $p_{M_1}$  obtenues à partir de simulations probabilistes de  $\mathbf{Y}$ , en utilisant la procédure de simulation de Monte-Carlo et l'expression polynômiale explicite (Lagrangienne) obtenue par la méthode de collocation stochastique.

	Distribution de $\mathbf{Y}$				
	distribution uniforme	distribution gaussienne	distribution lognormale	distribution lognormale tronquée	
				support $S_1(\mathbf{Y})$	support $S_2(\mathbf{Y})$
$m_{M_1}$ ( $10^{-3}$ m)	2,87	2,64	2,84	2,53	2,63
$\sigma_{M_1}$ ( $10^{-4}$ m)	6,88	3,97	2,69	2,10	2,10
$S_{M_1}$	0,83	0,84	0,37	0,37	0,24
$K_{M_1}$	2,13	2,28	4,61	2,24	2,37

TABLE 3.3: Moyenne ( $m_{M_1}$ ), écart-type ( $\sigma_{M_1}$ ), coefficient d'asymétrie ( $S_{M_1}$ ) d'aplatissement ( $K_{M_1}$ ) de la variable de contrôle  $M_1 = S_d$  pour les différentes distributions de  $\mathbf{Y}$ .

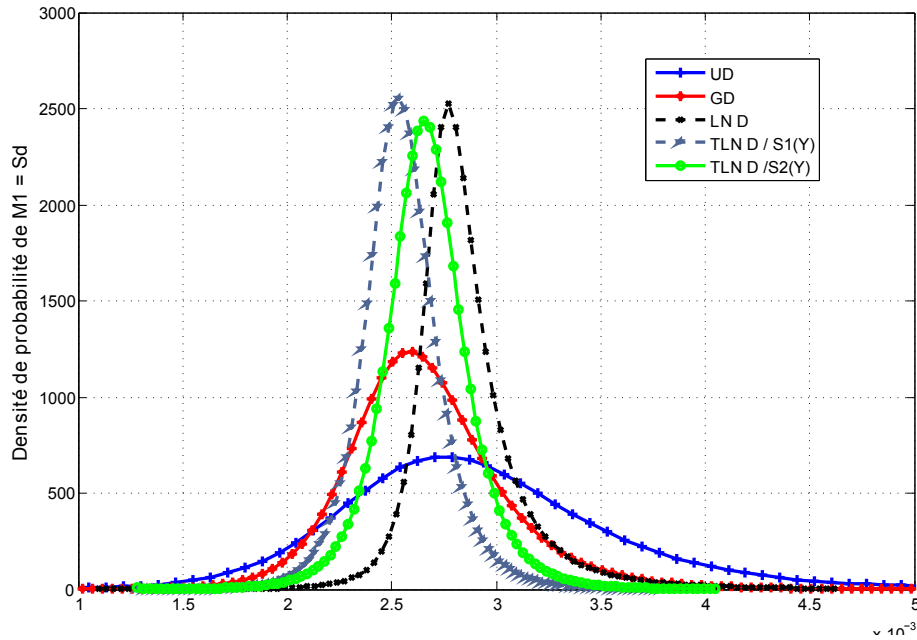


FIGURE 3.8: Distribution de  $M_1 = S_d$  pour les différentes distributions considérées de  $\mathbf{Y}$  : uniforme (UD), Gaussienne (GD), lognormale (LND) et lognormale tronquée avec support  $S_1(Y)$  (TLND/ $S_1(Y)$ ) et avec support  $S_2(Y)$  (TLND/ $S_2(Y)$ )

### Influence des corrélations

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'influence de la prise en compte de la corrélation statistique entre les composantes de  $\mathbf{Y}$  sur les variables de contrôle. Ce paramètre a tendance à être négligé ou sous-estimé lors de l'analyse statistique des mesures *in situ* et/ou la modélisation stochastique. Les

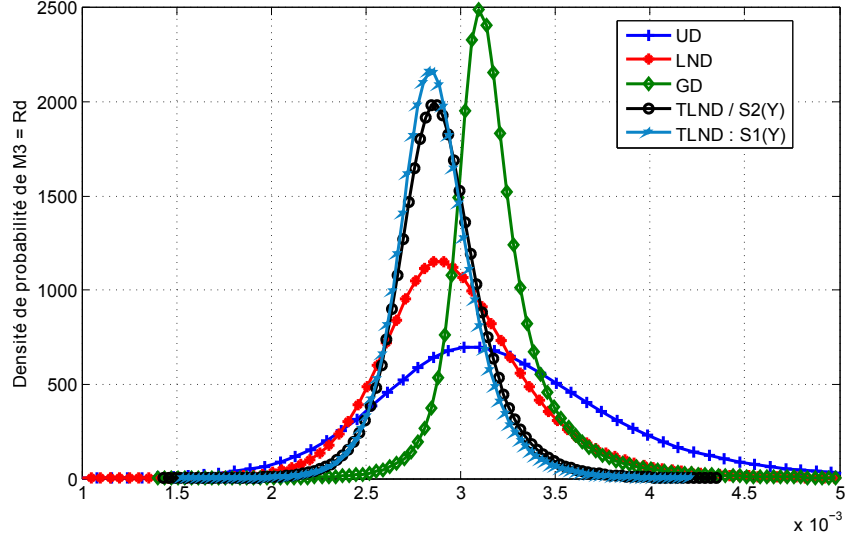


FIGURE 3.9: Distribution de  $M_3 = R_d$  pour les différentes distributions considérées de  $\mathbf{Y}$  : uniforme (UD), Gaussienne (GD), lognormale (LND) et lognormale tronquée avec support  $S_1(Y)$  (TLND/ $S_1(Y)$ ) et avec support  $S_2(Y)$  (TLND/ $S_2(Y)$ ).

résultats présentés sont relatifs à la situation suivante :

C1) Les paramètres aléatoires sont les mêmes que pour l'application précédente :  $Y_1 = h_b$ ,  $Y_2 = h_{sb}$ ,  $Y_5 = E_b$  et  $Y_6 = E_{sb}$ ; les autres paramètres sont supposés déterministes et à valeurs égales à leurs moyennes données dans le tableau 3.1. Par conséquent  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_5, Y_6)^T$ .

C2) Le vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$  est composé de v.a. lognormales de moyenne donnée  $\mathbf{m}_Y$  et de matrice de covariance  $\mathbf{C}_Y$  telle que :

$$\mathbf{m}_Y = \mathbb{E}[\mathbf{Y}] = (m_{Y_1}, m_{Y_2}, m_{Y_5}, m_{Y_6})^T \quad (3.40)$$

$$m_{Y_j} = \mathbb{E}[Y_j], \quad j \in \{1, 2, 5, 6\} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{C}_Y = \mathbb{E}[(\mathbf{Y} - \mathbf{m}_Y)(\mathbf{Y} - \mathbf{m}_Y)^T] = \begin{bmatrix} C_{Y_1 Y_1} & C_{Y_1 Y_2} & C_{Y_1 Y_5} & C_{Y_1 Y_6} \\ & C_{Y_2 Y_2} & C_{Y_2 Y_5} & C_{Y_2 Y_6} \\ & & C_{Y_5 Y_5} & C_{Y_5 Y_6} \\ & & & C_{Y_6 Y_6} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$C_{Y_j Y_k} = \mathbb{E}[(Y_j - m_{Y_j})(Y_k - m_{Y_k})] = \sigma_{Y_j} \sigma_{Y_k} \rho_{Y_j Y_k}, \quad (j, k) \in \{1, 2, 5, 6\}^2 \quad (3.43)$$

avec  $\rho_{Y_j Y_k}$  est le coefficient de corrélation du couple  $(Y_j, Y_k)$ .

C3) les valeurs des moyennes  $m_{Y_j}$  et des coefficients des écarts-types  $\sigma_{Y_j}$ ,  $j \in J = \{1, 2, 5, 6\}$ , sont données dans le tableau 3.1. Pour les coefficients de corrélations, deux cas sont considérés :

- Cas 1 :  $\rho_{Y_j Y_k} = \delta_{jk}$ ,  $\forall (j, k) \in J^2 = \{1, 2, 5, 6\}^2$ , avec  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker (i.e. les composantes  $Y_j$  de  $\mathbf{Y}$  ne sont pas corrélées et par conséquent elles sont indépendantes).

- Cas 2 : Les valeurs de ces coefficients sont ceux issus du traitement statistique des mesures *in situ*. Elles sont données dans le tableau 3.4.

C4) La variable de contrôle considérée est la déflexion de la traverse  $M_1 = S_d$ .

	$Y_1 = h_b$	$Y_2 = h_{sb}$	$Y_5 = E_b$	$Y_6 = E_{sb}$
$Y_1 = h_b$	1,00	0,39	0,19	0,50
$Y_2 = h_{sb}$	0,39	1,00	0,26	0,34
$Y_5 = E_b$	0,19	0,26	1,00	0,15
$Y_6 = E_{sb}$	0,50	0,34	0,15	1,00

TABLE 3.4: Valeurs des coefficients de corrélation  $\rho_{Y_j Y_k}$ , pour  $j, k \in \{1, 2, 5, 6\}$ .

Notons que dans le cas général où les composantes de  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_5, Y_6)^T$  sont corrélées, la densité de probabilité du vecteur aléatoire lognormal s'écrit :

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{(2\pi)^{-2} |\mathbf{\Gamma}|^{-\frac{1}{2}}}{\prod_{j \in J} y_j} \exp\left(-\frac{1}{2} (\ln(\mathbf{y}) - \ln(\mathbf{m}))^T \mathbf{\Gamma}^{-1} (\ln(\mathbf{y}) - \ln(\mathbf{m}))\right) \mathbb{1}_{(\mathbb{R}_+^*)^4}(\mathbf{y}) \quad (3.44)$$

où  $\prod_{j \in J} y_j$  désigne le produit  $y_1 y_2 y_5 y_6$ ,  $|\mathbf{\Gamma}|$  est le déterminant de la matrice  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $\mathbb{1}_B$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $B \subset \mathbb{R}^4$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_5, y_6)^T$  est l'élément générique de  $\mathbb{R}^4$ ,  $J$  est l'ensemble fini :

$$J = \{1, 2, 5, 6\} \quad (3.45)$$

et où l'on a posé :

$$\ln(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \ln y_5 \\ \ln y_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_5 \\ m_6 \end{pmatrix}, \quad \ln(\mathbf{m}) = \begin{pmatrix} \ln m_1 \\ \ln m_2 \\ \ln m_5 \\ \ln m_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{15} & \Gamma_{16} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{25} & \Gamma_{26} \\ \Gamma_{51} & \Gamma_{52} & \Gamma_{55} & \Gamma_{56} \\ \Gamma_{61} & \Gamma_{62} & \Gamma_{65} & \Gamma_{66} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

avec,  $\forall (j, k) \in J^2$  :

$$m_j = \frac{m_{Y_j}}{\sqrt{1 + (CV_{Y_j})^2}}, \quad \Gamma_{jk} = \ln(1 + (CV_{Y_j})(CV_{Y_k})\rho_{Y_j Y_k}) = \Gamma_{kj}, \quad CV_{Y_j} = \frac{\sigma_{Y_j}}{m_{Y_j}} \quad (3.47)$$

Dans ce cas, la transformation  $\mathbf{T}$  introduite dans la section 3.4.2 prend la forme suivante :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}(\mathbf{X}) \Leftrightarrow \begin{cases} Y_1 = T_1(\mathbf{X}) = \exp(m_1 + \sum_{k \in J} L_{1k} X_k) \\ Y_2 = T_2(\mathbf{X}) = \exp(m_2 + \sum_{k \in J} L_{2k} X_k) \\ Y_5 = T_5(\mathbf{X}) = \exp(m_5 + \sum_{k \in J} L_{5k} X_k) \\ Y_6 = T_6(\mathbf{X}) = \exp(m_6 + \sum_{k \in J} L_{6k} X_k) \end{cases} \quad (3.48)$$

où  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_5, X_6)^T$  est une v.a. gaussienne standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^4$ , les  $m_j$ ,  $j \in J$ , sont données par l'équation (3.47) et,  $\forall (j, k) \in J^2$ ,  $L_{jk}$  et le terme de rang  $(j, k)$  de la matrice triangulaire inférieure  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  telle que  $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{\Gamma}$  (décomposition de Cholesky de  $\mathbf{\Gamma}$ ), avec  $\mathbf{\Gamma}$  donnée par Eqs.(3.46)-(3.47).

Le tableau 3.5 donne les valeurs de la moyenne ( $m_{M_1}$ ), de l'écart-type ( $\sigma_{M_1}$ ), des coefficients d'asymétrie ( $S_{M_1}$ ) et d'aplatissement ( $K_{M_1}$ ) de  $M_1$  obtenues pour les deux cas d'étude (avec et sans corrélation). Ces résultats sont complétés par ceux donnés sur la figure 3.10 qui illustrent les distributions de  $M_1$  pour les deux cas d'analyse.

	$\mathbf{Y}$ à composantes corrélées	$\mathbf{Y}$ à composantes non corrélées
$m_{M_1}$ ( $10^{-3}$ m)	2,80	2,84
$\sigma_{M_1}$ ( $10^{-4}$ m)	2,43	2,96
$S_{M_1}$	-0,51	0,37
$K_{M_1}$	5,06	4,61

TABLE 3.5: Moyenne ( $m_{M_1}$ ), écart-type ( $\sigma_{M_1}$ ), coefficient d'asymétrie ( $S_{M_1}$ ) et d'aplatissement ( $K_{M_1}$ ) de la variable de contrôle  $M_1 = S_d$  pour les deux cas suivants :  $\mathbf{Y}$  à composantes corrélées et  $\mathbf{Y}$  à composantes non corrélées.

Nous remarquons que la distribution de  $M_1$  est sensible aux corrélations des composantes de  $\mathbf{Y}$ . Il importe donc de bien choisir ces paramètres dans les applications.



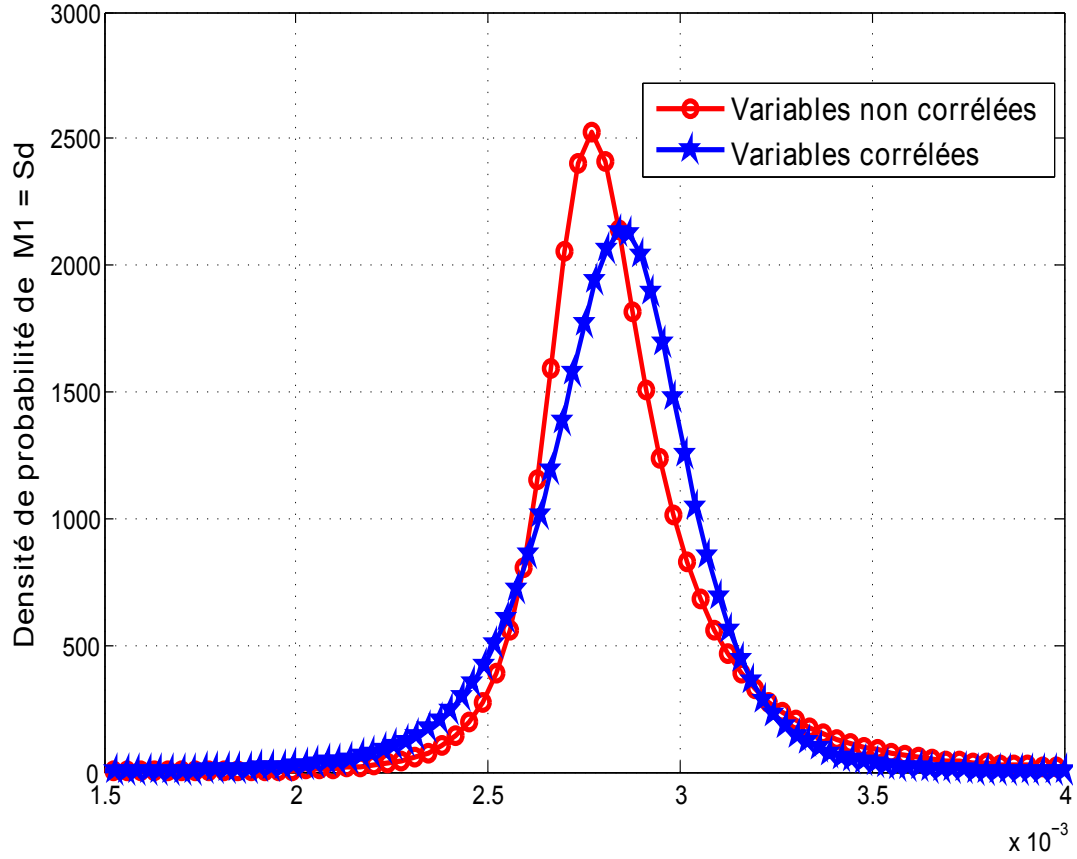


FIGURE 3.10: Distribution de  $M_1 = S_d$  pour le cas corrélé et non corrélé de  $\mathbf{Y}$ .

#### 3.4.4 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie la méthode d'éléments finis stochastiques utilisée dans ce travail. Cette méthode est basée sur une technique de collocation stochastique et nous avons pu nous rendre compte de tout son intérêt pour la problématique qui nous intéresse ici. Elle permet notamment, grâce à la grande simplicité de sa formulation, d'obtenir des formules d'approximation très aisément calculables pour les premiers moments de la réponse aléatoire et d'élaborer une procédure de Monte-Carlo économique et efficace pour l'estimation de la densité de probabilité de cette dernière.

Une analyse paramétrique de la convergence de la méthode a permis de fixer le nombre de points de collocations conditionnant le nombre d'appels au modèle de calcul déterministe. Le nombre de points de collocation retenu est de quatre par variable aléatoire. Cette analyse a également permis de mettre en évidence la grande incidence sur la réponse des lois et des corrélations des paramètres aléatoires, et montré ainsi l'importance à accorder aux choix de ces caractéristiques statistiques dans les études réelles.

Ainsi il est possible, en utilisant cette méthode, de caractériser statistiquement la propagation des incertitudes et par suite de l'analyser en termes fiabilistes.

### 3.5 Analyse fiabiliste

Nous présentons ici succinctement le principe de l'analyse fiabiliste d'un système mécanique à paramètres incertains modélisés par des variables aléatoires, ainsi que les principales formulations qui lui sont associées.

### 3.5.1 Données du problème

Les données de base de tout problème fiabiliste sont constituées d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et d'un couple  $(\mathbf{Y}, F)$  formé d'une v.a. vectorielle  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)^T$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  et d'une fonction  $F$  de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ . Les v.a. scalaires  $Y_1, \dots, Y_p$  regroupées dans le vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$  modélisent les paramètres incertains du modèle mécanique. La fonction  $F$ , appelée *fonction d'état limite*, définit les événements de sécurité  $E_s$  et de défaillance  $E_f$  associés aux états "fiable" et "défaillant" du modèle. Elle est telle que, pour tout  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ ,  $F(\mathbf{y}) > 0$  caractérise l'état *fiable* et  $F(\mathbf{y}) \leq 0$  l'état *défaillant*. Par conséquent,  $E_s$  et  $E_f$  sont définis par :

$$E_s = \{\omega \in \Omega : F(\mathbf{Y}(\omega)) > 0\} \quad , \quad E_f = \{\omega \in \Omega : F(\mathbf{Y}(\omega)) \leq 0\} \quad (3.49)$$

et vérifient :

$$E_s \cup E_f = \Omega \quad , \quad E_s \cap E_f = \emptyset \quad (3.50)$$

A ces deux événements sont associés les *domaines de sécurité*  $D_s$  et de *défaillance*  $D_f$  du modèle, tels que :

$$D_s = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : F(\mathbf{y}) > 0\} \quad , \quad D_f = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : F(\mathbf{y}) \leq 0\} \quad (3.51)$$

et qui vérifient :

$$D_s \cup D_f = \mathbb{R}^p \quad , \quad D_s \cap D_f = \emptyset \quad (3.52)$$

La v.a.  $\mathbf{Y}$  est définie par sa loi  $P_{\mathbf{Y}}$  sur  $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_p)$ , laquelle sera supposée admettre une densité  $p_{\mathbf{Y}}$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $d\mathbf{y}$  sur  $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}_p)$  :  $P_{\mathbf{Y}}(d\mathbf{y}) = p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})d\mathbf{y}$  (c'est-à-dire,  $\forall B \in \mathcal{B}_p$ ,  $P_{\mathbf{Y}}(B) = \int_B p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})d\mathbf{y}$ ). Pour des raisons évidentes liées à (3.58), cette densité doit vérifier :

$$\text{Supp}(p_{\mathbf{Y}}) \subset \text{Déf}(F) \quad (3.53)$$

où  $\text{Supp}(\cdot)$  désigne le support et  $\text{Déf}(\cdot)$  le domaine de définition.

### 3.5.2 Objectif fondamental

Il s'agit, une fois connue la densité de probabilité  $p_{\mathbf{Y}}$  de  $\mathbf{Y}$  et définis les événements de sécurité  $E_s$  et de défaillance  $E_f$  associés au critère de défaillance retenu pour le système étudié, de calculer les probabilités  $\mathbb{P}(E_s)$  et  $\mathbb{P}(E_f)$ , appelées respectivement *probabilité de sécurité* et *probabilité de défaillance* du système. Ces deux grandeurs sont données par :

$$\mathbb{P}(E_s) = \int_{D_s} p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad , \quad \mathbb{P}(E_f) = \int_{D_f} p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (3.54)$$

et vérifient :

$$\mathbb{P}(E_s) = 1 - \mathbb{P}(E_f) \quad (3.55)$$

En raison de (3.55), on ne s'intéresse généralement qu'à  $\mathbb{P}(E_f)$ , encore notée  $P_f$ , que l'on peut réécrire sous la forme :

$$P_f = \mathbb{P}(E_f) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{I}_{D_f}(\mathbf{y})p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (3.56)$$

où  $\mathbb{I}_{D_f}$  désigne la fonction indicatrice de l'ensemble  $D_f$  défini par (3.51).

En dehors de quelques cas d'école, on ne sait pas, en général, calculer de façon exacte l'intégrale (B.4). On est alors obligé d'opérer numériquement en ayant le plus souvent recours (dès que  $p > 3$ ) à une méthode de Monte-Carlo. Il existe des méthodes très efficaces de ce type dans la littérature [31, 38, 84]. On peut citer, en particulier, la dernière en date : la "subset simulation method" [5], qui donne d'excellents résultats même en grande dimension, notamment couplée avec une méthode SVM [28].

Rappelons un cas particulier célèbre où le calcul exact est possible : celui où  $\mathbf{Y}$  est gaussienne, de moyenne  $\mathbf{m}_{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^p$  et de matrice de covariance  $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , et  $F$  affine, de la forme :  $F(\mathbf{y}) = a_0 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle$ ,

$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)^T \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)^T \in \mathbb{R}^p$ ,  $a_0 \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas  $D_f$  est un demi-espace bordé par l'hyperplan  $\Pi_f = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p : a_0 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$  et un simple calcul montre que  $P_f$  a pour expression :

$$P_f = \Phi \left( -\frac{a_0 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{m}_{\mathbf{Y}} \rangle}{\langle \mathbf{C}_{\mathbf{Y}} \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2}} \right) \quad (3.57)$$

où  $\Phi$  désigne la fonction de répartition de la loi gaussienne standard sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire euclidien canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

### 3.5.3 Formulation standard du problème

Dans la démarche fiabiliste classique, il est d'usage de ramener la formulation du problème en variables gaussiennes standard. Pour cela, on s'appuie sur un résultat bien connu du calcul des probabilités et déjà utilisée dans ce chapitre (*cf* §3.4.2) [83, 31] qui stipule que, sous certaines conditions (que nous supposerons satisfaites ici), on peut toujours construire une transformation régulière  $\mathbf{T}$  telle que, si  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)^T$  est une v.a. gaussienne standard à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ , alors on a les égalités en loi :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}(\mathbf{X}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{Y}) \quad (3.58)$$

Supposons cette transformation construite. Alors, exprimés en fonction de  $\mathbf{X}$ , les événements de sécurité et de défaillance s'écrivent :

$$E_s = \{\omega \in \Omega : \Gamma(\mathbf{X}(\omega)) > 0\} \quad , \quad E_f = \{\omega \in \Omega : \Gamma(\mathbf{X}(\omega)) \leq 0\} \quad (3.59)$$

où :

$$\Gamma = F \circ \mathbf{T} \quad (3.60)$$

est la transformée par  $\mathbf{T}$  de la fonction d'état limite  $F$ . Les images par  $\mathbf{T}^{-1}$  des domaines de sécurité et de défaillance s'écrivent quant à elles :

$$\Delta_s = \mathbf{T}^{-1}(D_s) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \Gamma(\mathbf{x}) > 0\} \quad , \quad \Delta_f = \mathbf{T}^{-1}(D_f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p : \Gamma(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (3.61)$$

Par suite, procédant au changement de variable  $\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$  dans (3.59) (licite car  $\mathbf{T}$  est régulière) la probabilité de défaillance prend la forme :

$$P_f = \mathbb{P}(E_f) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{1}_{\Delta_f}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.62)$$

où  $p_{\mathbf{X}}$  est la densité de probabilité de la v.a. gaussienne standard  $p$ -dimensionnelle  $\mathbf{X}$ , telle que,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  :

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}} \exp \left( -\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{2} \right) \quad (3.63)$$

avec

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

L'expression (3.64) représente la formulation standard du problème fiabiliste et c'est généralement sur cette dernière que sont appliquées les méthodes de Monte-Carlo pour évaluer  $P_f$ . C'est également dans ce contexte gaussien qu'est défini l'indice de Hasofer-Lind [31, 44], très prisé en fiabilité structurale, et que sont utilisées les méthodes FORM (First Order Reliability Method) [31, 44, 80] et SORM (Second Order Reliability Method) [31, 46].

### 3.5.4 Marge de sécurité, performance

On appelle *marge de sécurité* ou *performance* la v.a.  $U$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , telle que :

$$U = F(\mathbf{Y}) \quad (3.64)$$

et qui, d'après (3.58) et (3.60), peut encore s'écrire :

$$U = \Gamma(\mathbf{X}) \quad (3.65)$$

Une telle variable est une grandeur scalaire – par exemple l'écart, en un point du système mécanique étudié, entre une variable de contrôle (déplacement, contrainte, déformation,...) et une valeur admissible de cette dernière – dont il importe de contrôler la valeur dans le cadre de l'analyse fiabiliste du système. Elle est à la base même de la définition des événements de sécurité et de défaillance. En effet, d'après (3.58) et (3.64), ou (3.59) et (3.65) :

$$E_s = \{\omega \in \Omega : U(\omega) > 0\} \quad , \quad E_f = \{\omega \in \Omega : U(\omega) \leq 0\} \quad (3.66)$$

### 3.5.5 Indice de Hasofer-Lind [31, 44]

Associé au problème ramené en variables gaussiennes standard, cet indice est défini par :

$$\beta_{HL} = d(O, \Delta_f) \quad (3.67)$$

où  $O$  est le point origine de  $\mathbb{R}^p$ ,  $\Delta_f$  est le domaine de défaillance défini par (3.61) et  $d(O, \Delta_f)$  est la distance euclidienne de  $O$  à  $\Delta_f$  (cf. figure 3.11). L'élément  $\mathbf{x}^*$  de  $\mathbb{R}^p$  tel que  $\|\mathbf{x}^*\| = \beta_{HL}$  est le *point de fonctionnement*, ou *design point*. Trouver  $\beta_{HL}$  revient à trouver ce point, donc à résoudre le problème d'optimisation contraint :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^p \text{ tel que :} \\ \|\mathbf{x}^*\| = \min_{\mathbf{x} \in \Delta_f} \|\mathbf{x}\| \end{cases} \quad (3.68)$$

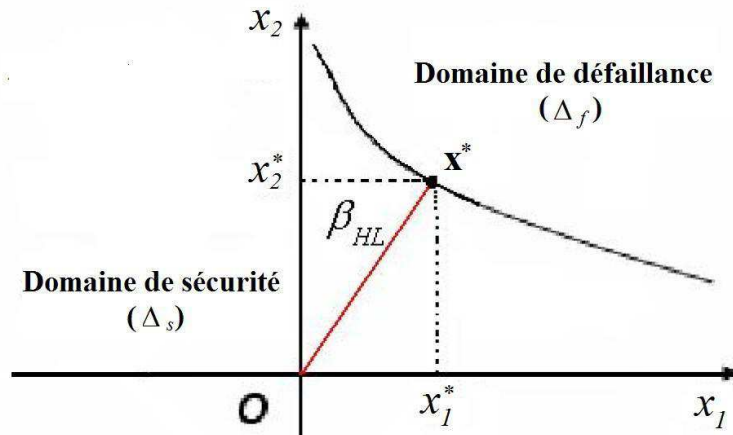


FIGURE 3.11: Indice de Hasofer-Lind ( $p = 2$ ).

De nombreux algorithmes, basés sur des méthodes primales (gradient projeté, gradient réduit, etc.) ou duales (lagrangiennes classiques, lagrangiennes généralisées, etc.) [71], peuvent être utilisés à cette fin. On peut également avoir recours à des algorithmes moins élaborés mathématiquement mais

donnant de bons résultats dans de nombreuses circonstances, à coûts de calcul réduits. Citons dans cette catégorie, l'algorithme de Rackwitz et ses dérivées [31, 80]. Bien entendu la solution de (3.68) n'est pas nécessairement unique. Notons que si la fonction  $\Gamma$  est affine, ce qui sera le cas par exemple si  $\mathbf{Y}$  est gaussienne ( $\mathbf{T}$  sera alors une transformation affine) et si  $F$  est affine, alors  $\Delta_f$  est un demi-espace et un simple calcul montre que la probabilité de défaillance (3.11) a pour expression :

$$P_f = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (3.69)$$

Si  $\Gamma$  n'est pas affine, la relation (3.69) ci-dessus ne tient plus. Mais dans ce cas, par référence à cette formule, et dans la mesure où l'on est capable, à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo par exemple, d'évaluer l'intégrale (3.11) ou (3.69) donnant  $P_f$ , on peut définir un indice de fiabilité conventionnel  $\beta^c$  par la relation :

$$\beta^c = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (3.70)$$

indice qui vérifie, bien évidemment,  $\beta^c = \beta_{HL}$  si  $\Gamma$  est affine [31]. Observons que la non-affinité de  $\Gamma$  peut provenir soit de la non-gaussianité de  $\mathbf{Y}$  (auquel cas  $\mathbf{T}$  n'est pas affine), soit de la non-affinité de  $F$ , soit de la conjonction de ces deux non-propriétés. Ainsi, si  $\mathbf{Y}$  est gaussienne et  $F$  non affine,  $\Gamma$  n'est pas affine et l'écart entre  $\beta^c$  et  $\beta_{HL}$  peut servir à mesurer le degré de non-affinité de  $F$ . De même, si  $F$  est affine et  $\mathbf{Y}$  non gaussienne,  $\Gamma$  n'est pas affine et l'écart entre  $\beta^c$  et  $\beta_{HL}$  peut alors servir à estimer le degré de non-gaussianité de  $\mathbf{Y}$ . Notons, pour terminer, que dans le cas où  $\mathbf{Y}$  est gaussienne, de moyenne  $\mathbf{m}_Y \in \mathbb{R}^p$  et de matrice de covariance  $\mathbf{C}_Y \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , et  $F$  affine, de la forme  $F(\mathbf{y}) = a_0 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ , avec  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$  et  $a_0 \in \mathbb{R}$  donnés, alors  $\beta_{HL}$  a pour expression :

$$\beta_{HL} = \frac{a_0 + \langle \mathbf{a}, \mathbf{m}_Y \rangle}{\langle \mathbf{C}_Y \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle^{1/2}} \quad (3.71)$$

Comme dans ce cas  $P_f$  est donnée par (3.69), on peut voir qu'il y a bien concordance entre (3.69)-(3.71) et (3.57).

### 3.5.6 Méthode FORM [31, 44, 80]

Cette méthode est basée sur l'idée de calculer la probabilité (3.11) en remplaçant le domaine d'intégration  $\Delta_f$  par un demi-espace  $\Delta_f^L$  défini comme suit.

Soit  $\Gamma_L$  l'application affine tangente associée à  $\Gamma$  au point de fonctionnement  $\mathbf{x}^*$ . Elle est telle que,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  :

$$\Gamma_L(\mathbf{x}) = \Gamma(\mathbf{x}^*) + \langle \nabla \Gamma(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \quad (3.72)$$

où  $\nabla \Gamma(\mathbf{x}^*)$  est le gradient de  $\Gamma$  au point  $\mathbf{x}^*$ . On suppose bien entendu ici que le point de fonctionnement  $\mathbf{x}^*$  est unique et que  $\nabla \Gamma$  existe en ce point. Le demi-espace de remplacement,  $\Delta_f^L$ , est alors défini par :

$$\Delta_f^L = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \Gamma_L(\mathbf{x}) \leq 0 \} \quad (3.73)$$

Par suite, en utilisant  $\Delta_f^L$  à la place de  $\Delta_f$  dans (3.11), une approximation de la probabilité de défaillance  $P_f$  est obtenue par :

$$P_f^L = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{1}_{\Delta_f^L}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.74)$$

et un simple calcul montre que cette approximation a pour expression :

$$P_f^L = \Phi \left( -\frac{\Gamma(\mathbf{x}^*) - \langle \nabla \Gamma(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* \rangle}{\|\nabla \Gamma(\mathbf{x}^*)\|} \right) \quad (3.75)$$

soit :

$$P_f^L = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (3.76)$$

car ici :

$$\beta_{HL} = \frac{\Gamma(\mathbf{x}^*) - \langle \nabla \Gamma(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* \rangle}{\|\nabla \Gamma(\mathbf{x}^*)\|} \quad (3.77)$$

### 3.5.7 Méthode SORM [31, 46]

Raffinement de la précédente, cette méthode consiste à remplacer la fonction d'état limite  $\Gamma$  par son application quadratique tangente  $\Gamma_Q$  en  $\mathbf{x}^*$ , telle que, pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  :

$$\Gamma_Q(\mathbf{x}) = \Gamma(\mathbf{x}^*) + \langle \nabla \Gamma(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 \Gamma(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \quad (3.78)$$

puis à remplacer le domaine de défaillance  $\Delta_f$  par le domaine :

$$\Delta_f^Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p, \Gamma_Q(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (3.79)$$

où dans (3.78)  $\nabla^2 \Gamma(\mathbf{x}^*)$  est la hessienne de  $\Gamma$  au point  $\mathbf{x}^*$  (on suppose bien entendu ici que cette hessienne existe). La probabilité de défaillance  $P_f$  est alors approximée par la probabilité :

$$P_f^Q = \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{1}_{\Delta_f^Q}(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.80)$$

On trouve dans la littérature plusieurs approximations de cette probabilité [31]. Citons par exemple une approximation asymptotique due à Breitung [18] :

$$P_f^Q \sim \Phi(-\beta_{HL}) \prod_{i=1}^{p-1} (1 - \beta_{HL} \chi_i)^{-1/2} \quad (\beta_{HL} \rightarrow +\infty) \quad (3.81)$$

où les  $\chi_i, i = 1, \dots, p-1$ , sont les courbures principales de  $\Gamma$  au point de fonctionnement, supposées vérifier :  $\beta_{HL} \chi_i < 1$ . Citons également une amélioration de cette approximation, due à Hohenbichler [47] :

$$P_f^Q \sim \Phi(-\beta_{HL}) \prod_{i=1}^{p-1} \left( 1 - \frac{\varphi(\beta_{HL})}{\Phi(-\beta_{HL})} \chi_i \right)^{-1/2} \quad (\beta_{HL} \rightarrow +\infty) \quad (3.82)$$

où  $\varphi$  est le densité de la loi gaussienne standard sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .

### 3.5.8 Remarque à propos du couplage mécano-fiabiliste

Le couplage MEFS/FORM s'effectue de la façon suivante : à l'aide de la méthode de collocation, on obtient une approximation de la fonction d'état limite. La recherche du point de conception est alors très rapide, les évaluations de  $\Gamma$  et de son gradient étant immédiates et ne nécessitant pas de nouveau calcul par éléments finis.

Ce type de couplage est cité par plusieurs auteurs [55] et permet avec un coût de calcul réduit d'effectuer une analyse fiabiliste du système étudié. Par ailleurs, l'ensemble des caractéristiques statistiques de la réponse étant déterminé une fois pour toutes, il est possible de faire à un très faible coût également des analyses supplémentaires. On peut ainsi aisément :

- calculer des approximations de la probabilité de défaillance pour différents seuils ainsi que de la densité de probabilité de la réponse,
- mener des analyses de fiabilité système.

Pour l'analyse de fiabilité effectuée dans ce travail, nous avons utilisé la surface de réponse issue de la méthode de collocation. L'algorithme de Rackwitz-Fiessler est donc associé à un couplage de la méthode de collocation et de la méthode FORM.

A titre d'exemple, la figure 3.12 illustre la convergence de cet algorithme pour un cas d'analyse par couplage MEFS/FORM. Nous pouvons observer une convergence très rapide puisque trois itérations

suffisent pour atteindre une valeur stabilisée de l'indice de Hasofer-Lind.

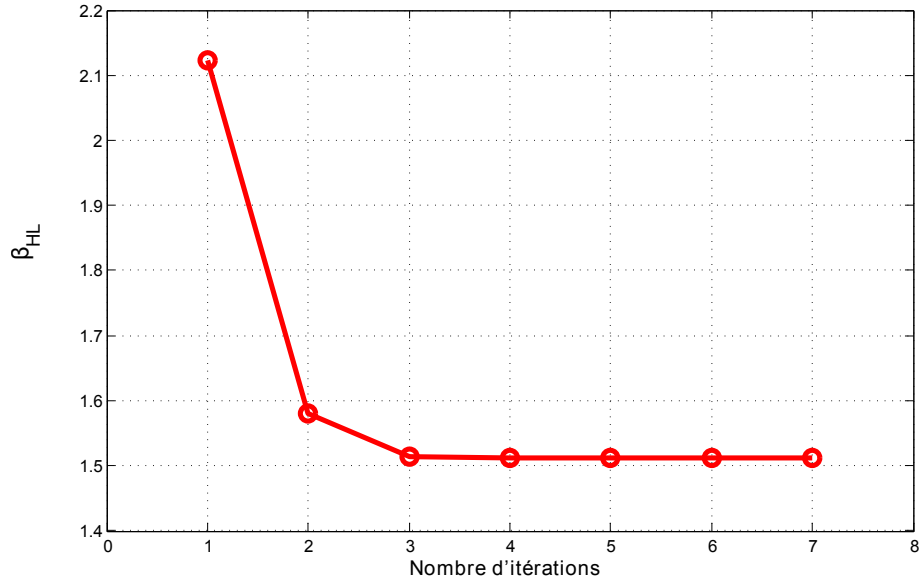


FIGURE 3.12: Convergence de l'algorithme d'optimisation par couplage MEFS/FORM.

### 3.6 Conclusions

Nous avons présenté une méthode d'éléments finis stochastique (MEFS) destinée à l'analyse probabiliste d'un modèle dynamique nonlinéaire représentant un tronçon d'une voie ferrée. Cette méthode est basée sur une procédure de collocation stochastique et permet d'estimer les moments statistiques du processus réponse ou de toute v.a. de contrôle liée à ce processus. Elle est conçue pour étudier la propagation des incertitudes affectant les paramètres mécaniques et géométriques du modèle EF.

La méthode de collocation retenue pour l'analyse stochastique du modèle de voie ferrée est particulièrement bien adaptée, non seulement à la caractérisation de la propagation des incertitudes, mais également à l'analyse fiabiliste de ce modèle. Les possibilités de cette méthode sont illustrées dans le prochain chapitre consacré à des applications ferroviaires.

## Chapitre 4

# Analyse par EFS d'un modèle de voie ferrée

### 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la méthode des éléments finis stochastiques (MEFS) proposée pour prendre en compte les incertitudes mécaniques et géométriques dans les modèles mécano-numériques de voies ferrées. Cette méthode est basée sur une technique de collocation stochastique et nous proposons ici quelques applications relatives au tronçon de voie ferrée présenté dans le chapitre 2.

La première application concerne l'étude de la propagation des incertitudes à travers le modèle EF utilisé. Nous nous intéressons ensuite à l'analyse probabiliste des effets de quelques opérations de maintenance. Enfin, dans la dernière application, nous montrons comment ces effets peuvent être évalués en terme fiabiliste.

### 4.2 Analyse de la propagation d'incertitude

#### 4.2.1 Introduction : analyse de sensibilité

Dans le contexte général du traitement des incertitudes, les méthodes d'analyse de sensibilité (appelées aussi méthodes de hiérarchisation des paramètres) visent à déterminer les paramètres d'entrée dont la variabilité a le plus d'influence sur la variabilité de la réponse du modèle mécanique étudié.

Considérons un modèle mécano-probabiliste constitué d'une  $p$ -famille de variables aléatoires d'entrée  $(Y_i)_{1 \leq i \leq p}$ , d'une fonction déterministe  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$ , et d'une  $d$ -famille de variables aléatoires de sortie (réponse mécanique)  $(R_j)_{1 \leq j \leq d}$ . Un tel modèle s'écrit :

$$\mathbf{R} = \mathbf{f}(\mathbf{Y}) \quad (4.1)$$

avec  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_p)^T$  et  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_d)^T$ .

L'analyse de sensibilité étudie comment des perturbations sur les entrées du modèle engendrent des perturbations sur la réponse. Il est possible de grouper les méthodes d'analyse de sensibilité en trois classes :

1. les méthodes de *screening*,
2. les méthodes d'analyse de sensibilité locale,
3. les méthodes d'analyse de sensibilité globale.



Les méthodes de *screening*, présentées par Saltelli *et al* [85, 86] analysent qualitativement l'importance des variables d'entrée sur la variabilité de la réponse du modèle. Elles permettent d'établir une hiérarchie au sein des variables d'entrée en fonction de leur influence sur la variabilité de la réponse. L'indice de sensibilité de  $R_j$  par rapport à  $Y_i$  est obtenu de la façon suivante :

$$S_{ij} = \frac{\frac{|r_j^1 - r_j^2|}{|r_j^1 + r_j^2|}}{\frac{|y_j^1 - y_j^2|}{|y_j^1 + y_j^2|}} \quad (4.2)$$

avec  $y_i^1$  et  $y_i^2$  les valeurs testées du paramètre d'entrée  $Y_i$  et  $r_j^1$  et  $r_j^2$  les valeurs correspondantes respectives de  $R_j$ , tous les autres paramètres d'entrée étant fixes.

L'analyse de sensibilité locale [85, 86, 52], tout comme l'analyse globale, sont des méthodes d'analyse quantitative, qui permettent, en plus d'établir une hiérarchie au sein des variables d'entrée, de donner un ordre de grandeur des écarts au sein de cette hiérarchie.

L'analyse de sensibilité locale étudie comment de petites perturbations autour d'une valeur  $y^0 = (y_1^0, \dots, y_p^0)$  des entrées se répercutent sur la valeur de la sortie. La méthode d'analyse locale la plus classique est l'approche *OAT* (*One factor At Time*), qui consiste à calculer ou estimer les indices de sensibilité définis par :

$$Si = \frac{\partial r}{\partial y_i}(y_1^0, \dots, y_p^0) \quad (4.3)$$

Ce paramètre quantifie l'effet sur  $\mathbf{R}$  d'une perturbation de  $\mathbf{Y}$  autour d'une valeur nominale  $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, \dots, y_p^0)$ .

L'analyse de sensibilité globale s'intéresse quant à elle à la variabilité de la sortie du modèle dans son domaine de variation. Elle étudie comment la variabilité des entrées se répercute sur celle de la sortie, en déterminant quelle part de variance de la sortie est due à telle entrée ou tel ensemble d'entrées. Il est possible de distinguer l'analyse locale de l'analyse globale de la sorte : l'analyse locale s'intéresse à la valeur de la réponse, tandis que l'analyse globale s'intéresse à sa variabilité.

Les indices de sensibilité de Sobol [98] sont un outil pertinent pour l'analyse globale. Leur calcul requiert cependant une simulation intensive et cette approche ne peut donc pas être directement appliquée avec des modèles numériques lourds.

Dans le cadre de ce travail, nous n'avons mené ni une analyse locale de sensibilité ni une analyse globale au sens de Sobol. Nous nous sommes contentés d'évaluer l'incidence de la variabilité de chaque paramètre aléatoire, considéré séparément, sur la réponse aléatoire du système. Cette analyse de sensibilité très simplifiée nous a ainsi permis d'éliminer certains paramètres incertains dont la variabilité aléatoire n'avait pas d'incidence significative sur la réponse. Les principaux résultats de cette étude sont indiqués dans le paragraphe suivant.

#### 4.2.2 Analyse de sensibilité simplifiée

Nous présentons dans cette partie les résultats des études paramétriques successives que nous avons menées afin de quantifier l'incertitude de la variabilité aléatoire de chaque paramètre incertain sur une variable de contrôle liée à la réponse du modèle EFS considéré.

Chaque étude a été réalisée selon le protocole suivant :

- un seul paramètre aléatoire  $Y_i$  est considéré à la fois,
- ce paramètre suit une loi lognormale de moyenne  $m_{Y_i}$  et de coefficient de variation  $CV_{Y_i} = \frac{\sigma_{Y_i}}{m_{Y_i}}$  donnés (cf. tableau 4.1),

- pour chaque  $Y_i$ , trois valeurs de  $CV_{Y_i}$  sont considérées : la valeur expérimentale  $CV_{Y_i}^{exp}$ ,  $80\% CV_{Y_i}^{exp}$  et  $120\% CV_{Y_i}^{exp}$ .

Paramètre aléatoire	Moyenne	Ecart-type
$Y_1 = h_b$	0,26 m	0,11 m
$Y_2 = h_{sb}$	0,64 m	0,25 m
$Y_3 = h_f$	0,97 m	0,59 m
$Y_4 = h_l$	1,62 m	0,69 m
$Y_5 = E_b$	38,91 MPa	11,27 MPa
$Y_6 = E_{sb}$	26,55 MPa	18,27 MPa
$Y_7 = E_f$	9,21 MPa	5,84 MPa
$Y_8 = E_l$	10,74 MPa	8,61 MPa

TABLE 4.1: Moyennes et écarts-types des v.a.  $Y_i$ .

Cette analyse simplifiée de sensibilité permet de mesurer l'influence de la variabilité de chaque  $Y_i$  sur celle des variables de contrôle  $M_i$ , les coefficients de variation de ces dernières servant à quantifier cette dernière.

À titre d'exemple, nous donnons sur la figure 4.1 l'évolution du coefficient de variation  $CV_{M_1}$  de la variable de contrôle  $M_1 = S_d$  en fonction du coefficient de variation  $CV_{Y_i}$  de chaque paramètre aléatoire  $Y_i$ .

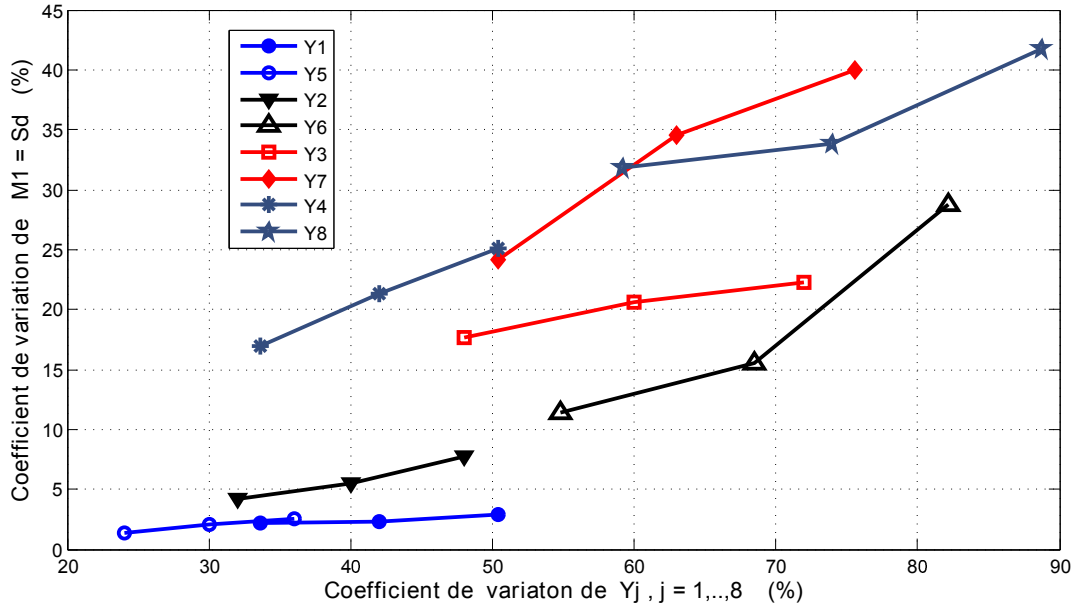


FIGURE 4.1: Évolution du coefficient de variation de  $M_1 = S_d$  en fonction du coefficient de variation de chaque paramètre aléatoire  $Y_i$ .

Afin de mieux illustrer l'influence de chaque paramètre aléatoire  $Y_i$  sur la dispersion de la v.a. de contrôle  $M_1 = S_d$ , nous avons calculé, pour chaque  $Y_i$ , la variation  $\Delta CV_{M_1}$  de  $CV_{M_1}$  correspondant à une variation  $\Delta CV_{Y_i} = 1,2 CV_{Y_i}^{exp} - 0,8 CV_{Y_i}^{exp} = 0,4 CV_{Y_i}^{exp}$  de  $CV_{Y_i}$ . Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 4.2. Ils montrent que le paramètre le plus influent est le module de Young de la couche de forme  $Y_7 = E_f$ . Les paramètres  $Y_4 = h_l$  et  $Y_8 = E_l$  ont aussi une influence importante. Il est à noter ici que l'épaisseur de la couche de limon  $h_l$  est mal contrôlée par les mesures Panda du fait de la limitation de profondeur des essais. Le tableau 4.2 montre également que les variables  $Y_1 = h_b$  et  $Y_5 = E_b$  ont peu d'influence sur la dispersion de  $M_1 = S_d$ .

	$Y_1$	$Y_5$	$Y_2$	$Y_6$	$Y_3$	$Y_7$	$Y_4$	$Y_8$
	$h_b$	$E_b$	$h_{sb}$	$E_{sb}$	$h_f$	$E_f$	$h_l$	$E_l$
$\Delta CV_{M_1}$	0,71	1,23	3,6	10,63	4,6	15,8	8,01	9,91

TABLE 4.2: Valeurs de  $\Delta CV_{M_1}$  correspondant à  $0.4CV_{Y_i}^{exp}$  pour chaque paramètre aléatoire  $Y_i$ .

L'ensemble des résultats issus de cette étude est résumé sur le graphe de la figure 4.2. Sur ce dernier sont représentés les  $\Delta CV_{M_j}$  des différents v.a. de contrôle  $M_j$  pour chaque paramètre aléatoire  $Y_i$ . Les modules de Young de la couche de forme ( $Y_7 = E_f$ ) et de la sous-couche ( $Y_6 = E_{sb}$ ) apparaissent comme ayant le plus d'influence sur la variabilité de la majorité des paramètres aléatoires et en particulier sur la déflexion de la traverse  $M_1 = S_d$  et l'indicateur de nivellement  $M_4 = \tilde{N}L$ . Plus généralement, on remarque que la variabilité des paramètres mécaniques (modules de Young  $Y_5 = E_b$ ,  $Y_6 = E_{sb}$ ,  $Y_7 = E_f$ ,  $Y_8 = E_l$ ) est plus significative que celle des paramètres de la géométrie (épaisseurs  $Y_1 = h_b$ ,  $Y_2 = h_{sb}$ ,  $Y_3 = h_f$ ,  $Y_4 = h_l$ ).

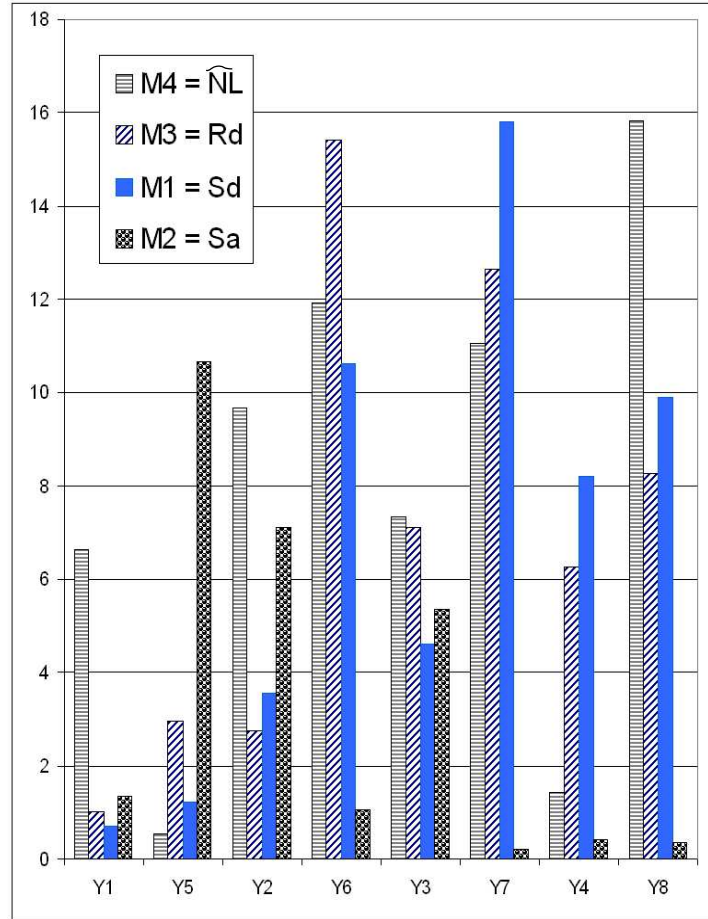


FIGURE 4.2:  $\Delta CV_{M_j}$  des différents paramètres  $Y_i$ .

Une autre façon d'analyser l'influence de la variabilité des paramètres est d'utiliser les indices de propagation d'incertitude, associés aux variables de contrôle  $M_i$ . L'indice de propagation d'incertitude relatif à la variable de contrôle  $M_i$  est défini,  $\forall k \in \{1, \dots, 8\}$ , par :

$$\alpha_i(k) = \frac{\Delta CV_{M_i}(k)}{\sum_{j=1}^8 \Delta CV_{M_i}(j)}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (4.4)$$

où  $\Delta CV_{M_i}(j)$  est l'écart sur le coefficient de variation de  $M_i$  résultant d'une variation du coefficient de variation de  $Y_j$ . Pour une v.a. de contrôle donnée, le paramètre aléatoire ayant la plus grande valeur d'indice d'incertitude est considéré comme le paramètre le plus influent.

La figure 4.3 montre la répartition graphique de cet indice pour l'ensemble des paramètres aléatoires. Elle met en évidence :

- l'influence majeure du module de Young de la couche de forme  $Y_7 = E_f$  sur toutes les variables de contrôle,
- que  $Y_4 = h_l$ ,  $Y_6 = E_{sb}$  et  $Y_7 = E_f$  sont les paramètres les plus influents tandis que les paramètres du ballast  $Y_1 = h_b$  et  $Y_5 = E_b$  ont peu d'influence,
- que l'accélération de la traverse  $M_2 = S_a$  est la plus sensible aux propriétés de la couche de ballast ( $Y_1 = h_b$  et  $Y_5 = E_b$ ),
- la faible influence du module de la couche de limons  $Y_4 = E_l$  sur la plupart des variables de contrôle.

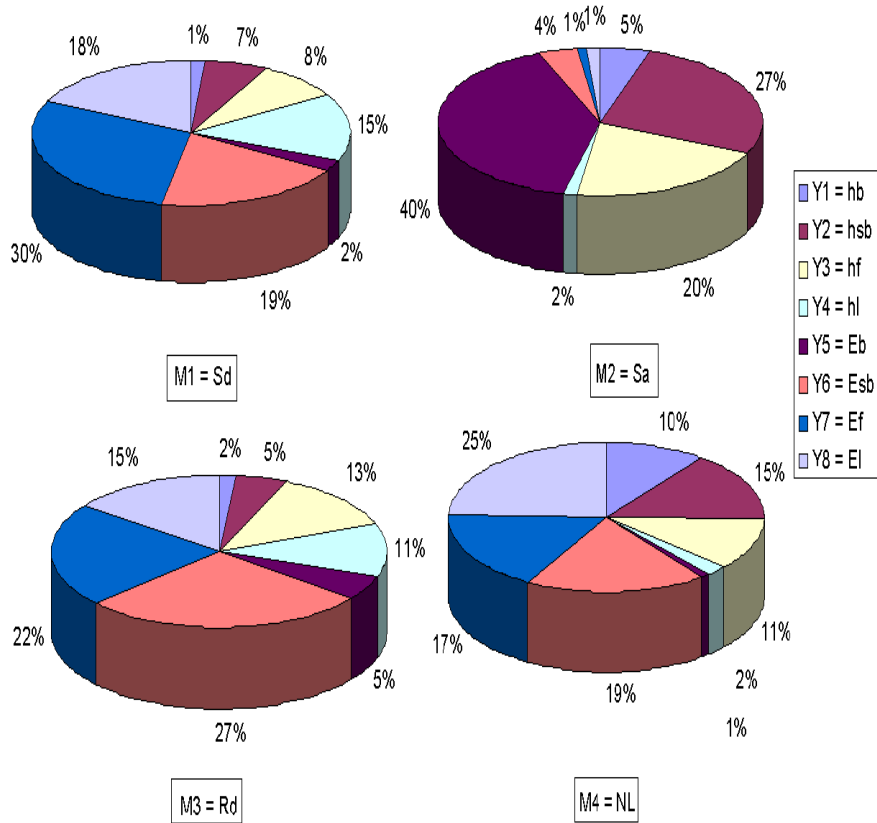


FIGURE 4.3: Indices de propagation d'incertitude pour chaque variable de contrôle.

Les résultats obtenus dans cette partie montrent la nécessité de contrôler la variabilité des paramètres mécaniques des composants de la voie et plus précisément de la couche de forme, considérée comme la moins raide du modèle ( $E_{moy} = 9,21$  MPa). Les conséquences de cette variabilité peuvent en effet être gênantes pour les conditions de circulation des trains (forte variabilité de la déflexion des rails) et conduire à long terme à des tassements différentiels (*cf.* la loi de Bodin par exemple) du fait notamment de la déflexion des traverses ( $S_d$  mesurée au point de contact avec la couche de ballast). La faible influence des paramètres de la couche de ballast peut être liée au fait que cette composante a des caractéristiques relativement bonnes en terme de raideur et d'épaisseur et de faibles coefficients de variation.

Le modèle de voie ferrée considéré présente un nombre de variables aléatoires relativement impor-

tant (8 v.a.) qui engendre un temps de calcul conséquent pour l'analyse fiabiliste de la voie. Ce temps est de :

$$t = 4^8 T$$

où  $T$  est le temps d'un calcul déterministe (environ 40 minutes dans la configuration utilisée).

Ce facteur temps nous contraint à réduire le nombre de paramètres aléatoires à prendre en compte dans l'analyse. En nous basant sur l'étude de la propagation des incertitudes et sur la nature des opérations de maintenance couramment pratiquées sur les voies ferrées, nous avons retenu les paramètres aléatoires suivants :

- l'épaisseur de la couche de ballast  $Y_1 = h_b$ ,
- le module d'élasticité de la couche de ballast  $Y_5 = E_b$ ,
- le module d'élasticité de la sous-couche  $Y_6 = E_{sb}$ ,
- le module d'élasticité de la couche de forme  $Y_7 = E_f$ .

Les caractéristiques statistiques de ces paramètres, de lois lognormales, sont données dans le tableau 4.3 (données site de Chambéry).

Paramètre aléatoire	Moyenne	Ecart-type
$Y_1 = h_b$	0,26 m	0,11 m
$Y_5 = E_b$	38,91 MPa	11,27 MPa
$Y_6 = E_{sb}$	26,55 MPa	18,27 MPa
$Y_7 = E_f$	9,21 MPa	5,84 MPa

TABLE 4.3: Caractéristiques des variables aléatoires retenues.

### 4.2.3 Conclusion

Nous venons de présenter une application de la MEFS proposée pour prendre en compte les incertitudes dans les modèles mécano-numériques destinés à étudier le comportement mécanique des voies ferrées. Basée sur une technique de collocation stochastique, cette méthode permet d'estimer les moments statistiques du processus réponse et de toute v.a. de contrôle liée à ce processus, et par là-même, d'étudier la propagation des incertitudes mécaniques et géométriques dans le modèle. L'exemple numérique traité, bien que relativement simple, atteste de la pertinence de cette approche pour ce type d'application.

L'analyse de la propagation des incertitudes via le modèle mécano-numérique de voie ferrée a permis d'analyser la sensibilité de la réponse de ce dernier à la variabilité qui entache ses données. Elle nous a permis de sélectionner les v.a. les plus influentes et donc pratiquement de réduire le volume des calculs nécessaires pour les analyses présentées dans la suite de ce chapitre. Ce type d'analyse est non seulement d'une grande utilité pour la compréhension du comportement de la réponse mais également pour le développement des procédures de conception et de maintenance.

## 4.3 Analyse paramétrique des opérations de maintenance des voies ferrées

L'objectif de cette application est de proposer des cas pratiques d'analyse d'opérations de maintenance et d'étudier le gain éventuel apporté par ces opérations en terme de probabilité de défaillance. A ce titre, nous proposons de simuler à l'aide du modèle EFS de voie ferrée l'effet des opérations de relevage, de traitement de la plate-forme ainsi qu'une opération de drainage.

Dans tout ce qui suit, nous considérons les caractéristiques mesurées sur site comme l'état initial. L'ensemble des applications présentées dans la suite prennent en compte l'existence de quatre

v.a. dont les caractéristiques statistiques sont données dans le tableau 4.3 supposées suivre des lois lognormales. La matrice de corrélation ( $C_{Y_i, Y_j}$ ) (issue des mesures *in situ*) est donnée dans le tableau 4.4.

	$Y_1$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$Y_1$	100	20	50	85
$Y_5$	–	100	15	17
$Y_6$	–	–	100	44
$Y_7$	–	–	–	100

TABLE 4.4: Corrélation  $C_{Y_i, Y_j}(\%)$  entre les v.a.  $Y_i, Y_j$ .

Les caractéristiques statistiques des variables de contrôle  $M_i, i = 1..4$  correspondant à l'état considéré sont donnée dans le tableau 4.5 ci-dessous.

	$M_1 = S_d \text{ (m)}$	$M_2 = S_a \text{ (m/s}^2\text{)}$	$M_3 = R_d \text{ (m)}$	$M_4 = \tilde{N}L \text{ (m)}$
Moyenne	$2,997 \cdot 10^{-3}$	10,611	$3,354 \cdot 10^{-3}$	$2,0785 \cdot 10^{-4}$
Écart-type	$1,064 \cdot 10^{-3}$	2,891	$1,049 \cdot 10^{-3}$	$8,061 \cdot 10^{-5}$
Coefficient d'asymétrie	1,548	0,366	1,514	0,929
Coefficient d'aplatissement	7,052	1,934	7,044	3,205

TABLE 4.5: Moments statistiques des différentes variables de contrôle  $M_i, i = 1, \dots, 4$ .

### 4.3.1 Relevage de la voie

Le relevage est le surélèvement de la voie par une couche supplémentaire de ballast mise en place sous les traverses. Il a pour objectif d'introduire du ballast neuf afin d'améliorer le comportement de la voie sans enlever le ballast qualifié d'usé (par l'impact du trafic et par des passages antérieurs de bourreuses (figure 4.4)).



FIGURE 4.4: Exemple d'opération de relevage.

On peut donc supposer que, suite à ce type d'opération, seule l'épaisseur de la couche de ballast sera augmentée. Nous considérons de plus que cette opération a pour conséquence supplémentaire la

diminution de la dispersion des valeurs d'épaisseur de cette couche. Nous testerons trois configurations correspondant à l'injection d'une couche de ballast de 5, 8 et 10 cm. Ces opérations sont accompagnées, suite aux opérations de bourrage, d'une augmentation de la moyenne du module de la couche de ballast ainsi que d'une diminution de son écart-type (voir tableau 4.6 ci-dessous dans lequel les valeurs modifiées par rapport aux valeurs initiales du tableau 4.3 apparaissent en gras).

L'estimation au préalable de la variation des caractéristiques mécaniques et géométriques de la voie ferrée engendrée par les différentes opérations de relevage est difficile. Nous estimons que les caractéristiques de la couche de ballast après relevage sont celle du ballast lors de la mise en œuvre. Cependant, une variabilité est pris en compte qui peut être liée aux imperfections de mise en œuvre.

	Paramètre aléatoire	Moyenne	Ecart-type
Relevage de 5 cm	$Y_1 = h_b$	<b>0,31 m</b>	<b>0,05 m</b>
	$Y_5 = E_b$	<b>45 MPa</b>	<b>8 MPa</b>
	$Y_6 = E_{sb}$	26,55 MPa	18,27 MPa
	$Y_7 = E_f$	9,21 MPa	5,84 MPa
Relevage de 8 cm	$Y_1 = h_b$	<b>0,34 m</b>	<b>0,05 m</b>
	$Y_5 = E_b$	<b>45 MPa</b>	<b>8 MPa</b>
	$Y_6 = E_{sb}$	26,55 MPa	18,27 MPa
	$Y_7 = E_f$	9,21 MPa	5,84 MPa
Relevage de 10 cm	$Y_1 = h_b$	<b>0,36 m</b>	<b>0,05 m</b>
	$Y_5 = E_b$	<b>45 MPa</b>	<b>8 MPa</b>
	$Y_6 = E_{sb}$	26,55 MPa	18,27 MPa
	$Y_7 = E_f$	9,21 MPa	5,84 MPa

TABLE 4.6: Caractéristiques des variables après une opération de relevage.

Nous examinerons ci-après l'effet de ce changement sur les différentes variables de contrôle.

### Effet sur le $\tilde{N}L$

Nous donnons dans le tableau 4.7, pour chaque cas de relevage, les valeurs obtenues des deux premiers moments statistiques de  $M_4 = \tilde{N}L$ , ainsi que l'amélioration observée par rapport à l'état initial (%).

Relevage			Amélioration (%)
5 cm	Moyenne (m)	$2,041 \cdot 10^{-4}$	1,83
	Écart-type (m)	$7,651 \cdot 10^{-5}$	5,08
8 cm	Moyenne (m)	$2,033 \cdot 10^{-4}$	2,19
	Écart-type (m)	$7,591 \cdot 10^{-5}$	5,83
10 cm	Moyenne (m)	$1,995 \cdot 10^{-4}$	4,01
	Écart-type (m)	$7,387 \cdot 10^{-5}$	8,36

TABLE 4.7: Statistiques de  $M_4 = \tilde{N}L$  (m) après une opération de relevage.

Nous remarquons que cette opération a peu d'impact sur la moyenne du  $\tilde{N}L$ , l'amélioration étant d'environ 2 % pour l'injection de 5 cm de ballast et 4 % pour 10 cm. Une amélioration légèrement plus importante est observée pour l'écart-type : 5,08 % pour 5 cm et 8,36 % pour 10 cm, ce qui montre que cette opération a plus d'impact sur la dispersion que sur la valeur moyenne de l'indicateur de nivellement ( $\tilde{N}L$ ), même si les coefficients de variation après relevage restent importants et proches de celui de l'état initial (42 %).

Sur la figure 4.5 est représentée la densité de probabilité de  $M_4 = \tilde{N}L$  avant et après relevage. La proximité des densités atteste bien de la faible sensibilité du  $\tilde{N}L$  aux variations liées aux opérations de relevage, même pour des relevages importants (10 cm).

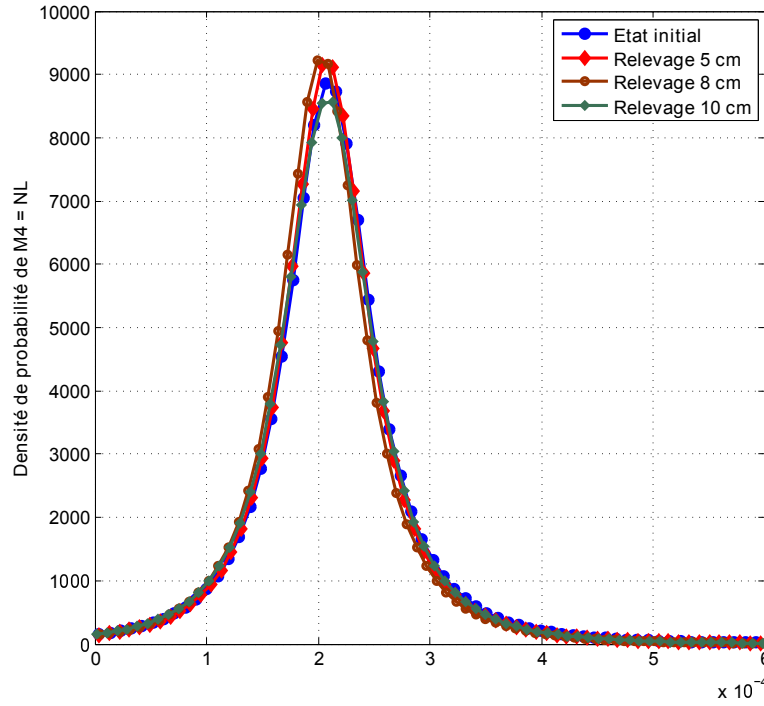


FIGURE 4.5: Densité de probabilité de  $M_4 = \tilde{N}L$  (m) avant et après relevage.

#### Effet sur la déflexion du rail ( $R_d$ )

Les valeurs obtenues des deux premiers moments statistiques de la déflexion du rail, pour chaque cas de relevage,  $M_3 = R_d$  ainsi que l'amélioration observée par rapport à l'état initial (%) sont données dans le tableau 4.8.

Relevage			Amélioration (%)
5 cm	Moyenne (m)	$3,329 \cdot 10^{-3}$	0,7
	Écart-type (m)	$1,023 \cdot 10^{-3}$	2,5
8 cm	Moyenne (m)	$3,307 \cdot 10^{-3}$	1,4
	Écart-type (m)	$1,022 \cdot 10^{-3}$	2,57
10 cm	Moyenne (m)	$3,277 \cdot 10^{-3}$	2,29
	Écart-type (m)	$1,035 \cdot 10^{-3}$	1,4

TABLE 4.8: Statistiques de la déflexion du rail  $M_3 = R_d$  après une opération de relevage.

Sur la figure 4.6 est représentée la densité de probabilité de la déflexion du rail  $M_3 = R_d$  avant et après relevage. Comme pour le  $\tilde{N}L$ , nous remarquons le faible impact du relevage de la couche de ballast sur la déflexion du rail.



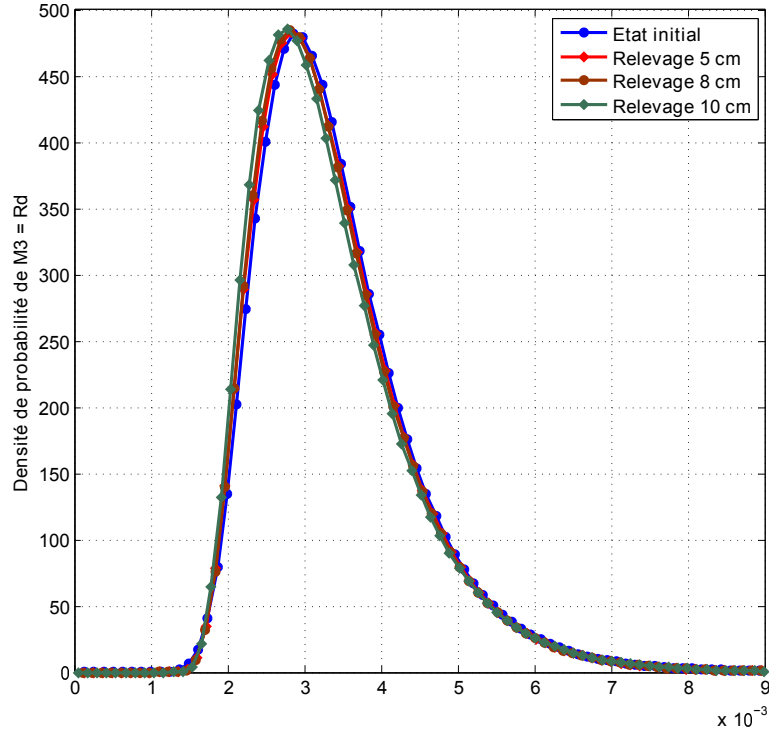


FIGURE 4.6: Densité de probabilité de  $M_3 = Rd$  avant et après relevage.

#### Effet sur la déflexion de traverse ( $S_d$ )

Nous donnons dans le tableau 4.9, pour chaque cas de relevage, les valeurs obtenues des deux premiers moments statistiques de la déflexion de traverse  $M_1 = S_d$ , ainsi que l'amélioration observée par rapport à l'état initial (%).

Relevage			Amélioration (%)
5 cm	Moyenne (m)	$2,939 \cdot 10^{-3}$	2
	Écart-type (m)	$1,038 \cdot 10^{-3}$	2,5
8 cm	Moyenne (m)	$2,926 \cdot 10^{-3}$	2,36
	Écart-type (m)	$1,028 \cdot 10^{-3}$	3,38
10 cm	Moyenne (m)	$2,912 \cdot 10^{-3}$	2,83
	Écart-type (m)	$1,027 \cdot 10^{-3}$	3,47

TABLE 4.9: Statistiques de  $M_1 = S_d$  après une opération de relevage.

Nous remarquons que cette opération a une faible influence sur la moyenne et l'écart-type de la déflexion de traverse. La variation par rapport à l'état initial ne dépasse pas les 3 %. Ces résultats sont confirmés par les densités de probabilités avant et après relevage de  $M_1 = S_d$ , représentées sur la figure 4.7.

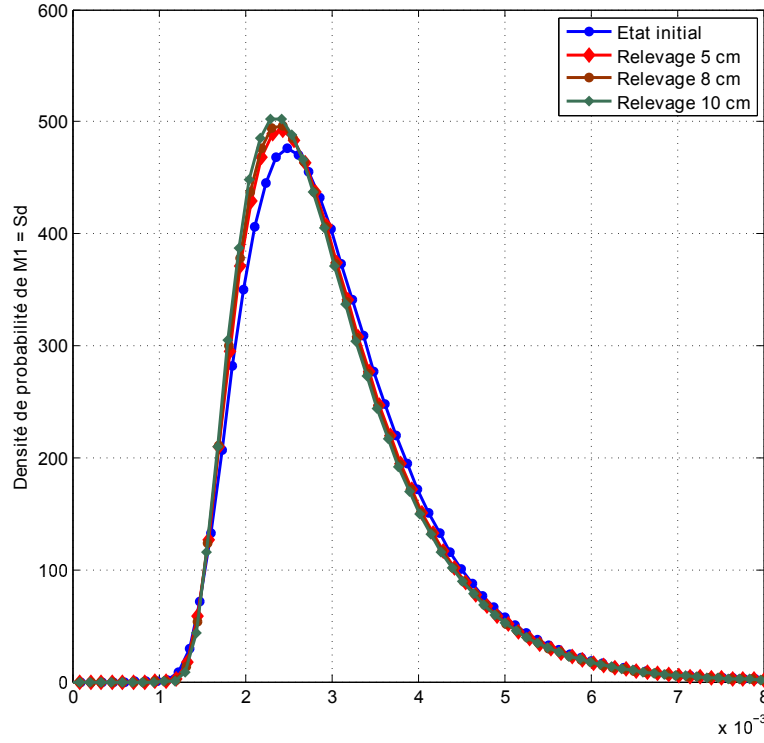


FIGURE 4.7: Densité de probabilité de  $M_1 = S_d$  avant et après relevage.

#### Effet sur l'accélération de traverse ( $S_a$ )

Les valeurs obtenues, pour chaque cas de relevage, des deux premiers moments statistiques de l'accélération de traverse  $M_2 = S_a$ , ainsi que l'amélioration observée par rapport à l'état initial (%) sont données dans le tableau 4.10.

Relevage			Amélioration (%)
5 cm	Moyenne ( $m/s^2$ )	9,480	10,65
	Écart-type ( $m/s^2$ )	1,881	34,92
8 cm	Moyenne ( $m/s^2$ )	9,378	11,62
	Écart-type ( $m/s^2$ )	1,743	39,71
10 cm	Moyenne ( $m/s^2$ )	9,035	14,85
	Écart-type ( $m/s^2$ )	3,077	6,43

TABLE 4.10: Statistiques de  $M_2 = S_a$  après une operation de relevage.

Les résultats donnés dans le tableau 4.10 montrent que l'opération de relevage de la couche de ballast a une forte influence sur les moments statistiques de l'accélération de traverse. L'amélioration observée est de 11 % sur la moyenne et de 34 % sur l'écart-type pour l'injection de 5 cm et de 15 % sur la moyenne et de 6,43 % sur l'écart-type pour une injection de 10 cm de ballast. Cette opération permet ainsi de diminuer la dispersion des accélérations : le coefficient de variation de  $M_2 = S_a$  passe de 27 % (état initial) à 19 % après relevage de 5 cm. Ces remarques sont plus visibles sur les densités de probabilité  $M_1 = S_a$  représentées sur la figure 4.8.

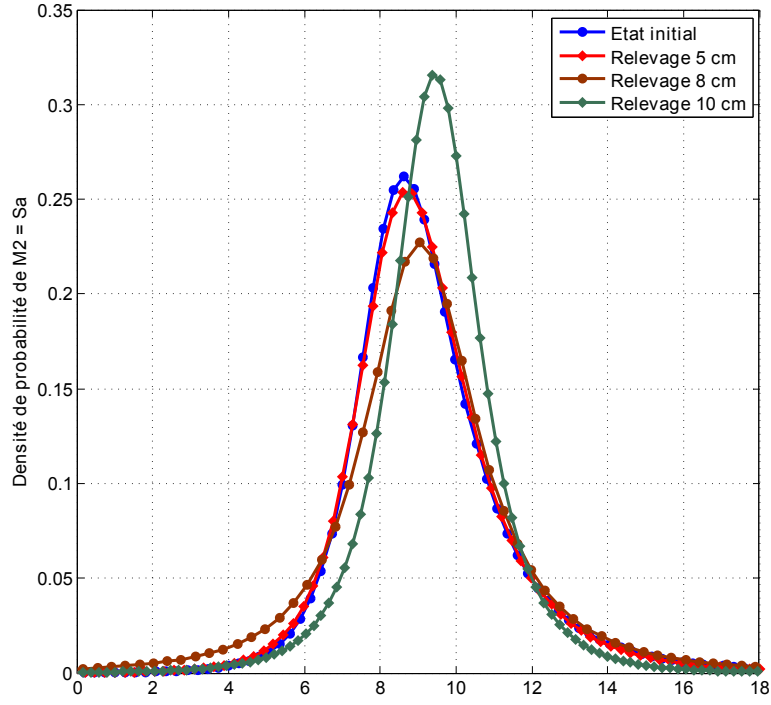


FIGURE 4.8: Densité de probabilité de  $M_2 = S_a$  avant et après relevage.

## Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié l'influence d'une simulation d'opération de relevage de la voie ferrée par injection de ballast sur la réponse de la voie. Nous remarquons un faible effet de cette opération sur l'indicateur de nivellement ( $\tilde{NL}$ ) et les déflexions du rail ( $R_d$ ) et de la traverse ( $S_d$ ) (*cf.* figure 4.9). Cependant, un effet important est observé sur l'accélération de la traverse ( $S_a$ ), caractérisé par une diminution significative de la moyenne et de la dispersion. Ces remarques corroborent les conclusions des études présentées dans la partie 1 qui ont montré la sensibilité de ce paramètre aux caractéristiques de la couche de ballast et à l'épaisseur de celle-ci.

Il est important de noter que la notion de confort est souvent qualifiée par l'accélération ressentie, d'où l'importance de l'amélioration des caractéristiques de  $S_a$ .

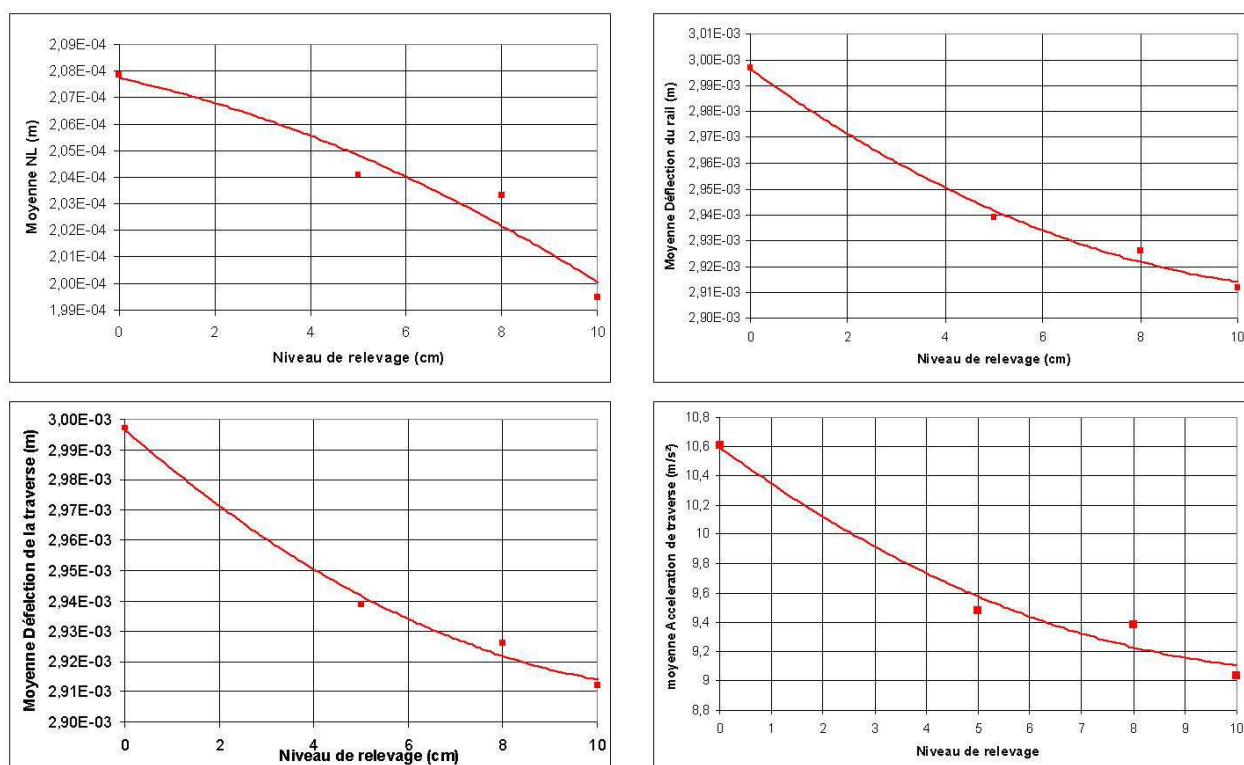


FIGURE 4.9: Evolution des moyennes des variables de contrôle en fonction du niveau de relevage (cm).

### 4.3.2 Traitement de la couche intermédiaire

Parmi les opérations pratiquées pour améliorer la qualité des voies ferrées arrivées en fin de cycle de vie se trouve celle dite de Renouvellement Voie Ballast (RVB). Une opération de renouvellement peut être déclenchée lorsque les opérations de maintenance préventive ne sont plus efficaces, c'est-à-dire lorsque la dégradation ne peut plus être réduite. Il s'agit d'un chantier mécanisé ferroviaire itinérant, destiné à remplacer la voie ferrée dans son ensemble : les rails, les traverses, le ballast et la sous-couche, ou une partie de celle-ci. C'est une opération de maintenance lourde contrairement aux opérations ponctuelles ou superficielles qui peuvent aussi être mécanisées, telles que le changement de traverses, de ballast ou le bourrage.

Nous nous intéressons ici à la partie infrastructure de la structure ferroviaire constituée de la couche de ballast et de la sous-couche.

Un RVB nécessite du matériel à haut rendement et à grande capacité, effectuant les opérations dans un ordre précis. Un tel matériel comprend :

- une dégarnisseuse, chargée de retirer le ballast,
- un train de substitution permettant le renouvellement en continu des traverses et des rails,
- une garnisseuse/régaleuse, destinée à placer et à répartir le ballast,
- une bourreuse, conçue pour la mise en place du ballast.

Dans le cas où la sous-couche est remplacée, des spécifications techniques sont à respecter :

- la sous-couche doit être constituée de matériaux élaborés, en grave concassée bien graduée, et lorsque la couche de forme comporte plus de 12 % de passant à 0,08 mm, un géotextile conforme aux spécifications du marché doit être interposé entre la sous-couche et la couche de forme [59],
- la mise en œuvre et le compactage des matériaux de sous-couche doivent respecter les prescriptions de l'article 15 du livret des travaux d'infrastructure ferroviaire [59],
- à la mise en œuvre, chaque couche doit être d'épaisseur inférieure ou égale à 30 cm, et lorsque la

couche de fondation est d'épaisseur supérieure à 30 cm, elle doit être réalisée en plusieurs couches comprises entre 15 et 30 cm griffées sur 5 cm avant l'exécution de la couche supérieure.

Le niveau de compactage dépend de la nature et des caractéristiques de la couche de forme. Nous proposons dans cette étude deux niveaux de compactage de la sous-couche, désignés sous les appellations : option 1 et option 2 (*cf.* tableau 4.11). Les caractéristiques de la couche de ballast correspondent aux exigences de pose spécifiées. Il est à noter que la variabilité des caractéristiques de la sous-couche s'explique par le fait qu'une partie de cette dernière (à l'interface avec la couche de forme) avant traitement n'est pas remplacée afin de ne pas modifier la couche de forme.

	Paramètre aléatoire	Moyenne	Ecart-type
Option 1	$Y_1 = h_b$	0, 26 m	<b>0,03</b> m
	$Y_5 = E_b$	<b>50</b> MPa	<b>2,5</b> MPa
	$Y_6 = E_{sb}$	<b>50</b> MPa	<b>7</b> MPa
	$Y_7 = E_f$	<b>19</b> MPa	5,84 MPa
Option 2	$Y_1 = h_b$	0, 26 m	<b>0,03</b> m
	$Y_5 = E_b$	<b>50</b> MPa	<b>2,5</b> MPa
	$Y_6 = E_{sb}$	<b>70</b> MPa	<b>7</b> MPa
	$Y_7 = E_f$	<b>19</b> MPa	5,84 MPa

TABLE 4.11: Caractéristiques de la plate-forme ferroviaire après une opération de traitement de la sous-couche.

### Effet sur le $\tilde{N}L$

Nous donnons dans le tableau 4.12, pour chaque option, les valeurs obtenues des deux premiers moments statistiques de  $M_4 = \tilde{N}L$ , ainsi que l'amélioration observée par rapport à l'état initial (%).

			Amélioration (%)
Option 1	Moyenne (m)	$1,861 \cdot 10^{-4}$	2
	Écart-type (m)	$5,586 \cdot 10^{-5}$	30
Option 2	Moyenne (m)	$1,767 \cdot 10^{-4}$	7
	Écart-type (m)	$4,358 \cdot 10^{-5}$	46

TABLE 4.12: Statistiques de  $M_4 = \tilde{N}L$  après une opération de traitement de la sous-couche.

Nous remarquons que l'amélioration sur la moyenne du  $\tilde{N}L$  par rapport à l'état initial est de 2 % pour l'option 1 et de 7 % pour l'option 2, gains relativement faibles. Par contre, nous pouvons observer une nette diminution de la dispersion du  $\tilde{N}L$  pour les deux options. Ce résultat est illustré graphiquement sur la figure 4.10 représentant la densité de probabilité de  $\tilde{N}L$  relative à chaque état de la voie.

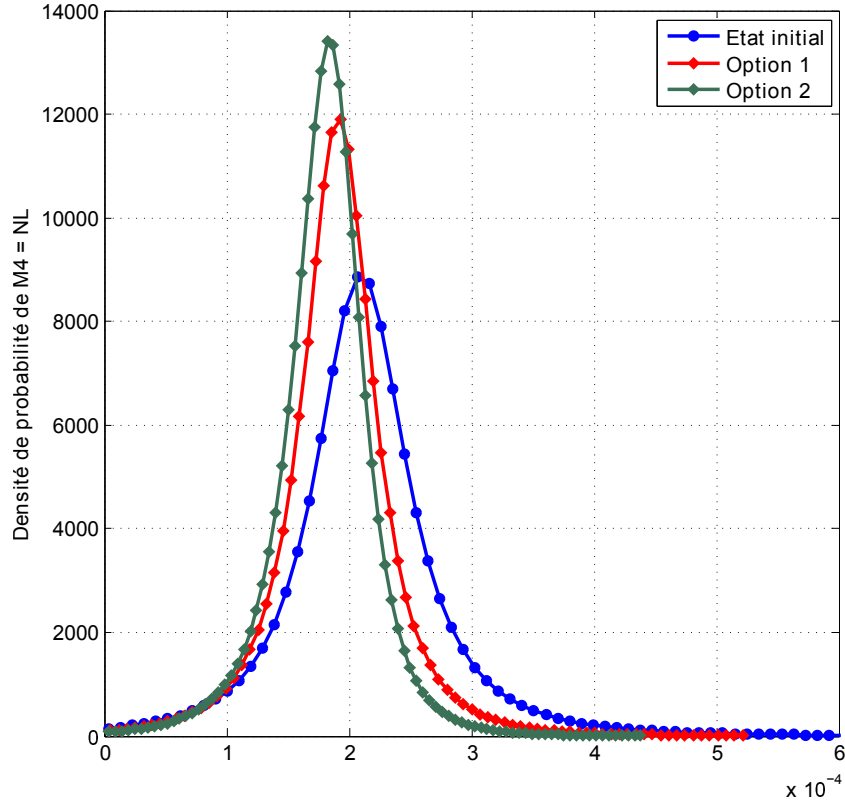


FIGURE 4.10: Densité de probabilité de  $M_4 = \tilde{N}L$  avant et après traitement de la sous-couche.

#### Effet sur la déflexion du rail ( $R_d$ )

Dans le tableau 4.13, nous donnons, pour chaque option, les valeurs obtenues des deux premiers moments statistiques de la déflexion du rail  $M_3 = R_d$ , ainsi que l'amélioration observée par rapport à l'état initial (%).

			Amélioration (%)
Option 1	Moyenne (m)	$3,164 \cdot 10^{-3}$	5,7
	Écart-type (m)	$9,580 \cdot 10^{-4}$	8,7
Option 2	Moyenne (m)	$2,913 \cdot 10^{-3}$	13,14
	Écart-type (m)	$8,812 \cdot 10^{-4}$	16

TABLE 4.13: Statistiques de  $M_3 = R_d$  après une opération de traitement de la sous-couche.

Nous remarquons qu'en appliquant un niveau de compactage plus important à la sous-couche (option 2), on réduit la moyenne de la déflexion du rail de 13 % et son écart-type de 16 %. Il en résultera de ce fait une diminution notable des effets dynamiques. La première variante (option 1), qui correspond à un niveau de compactage moyen, permet de réduire de 6 % la moyenne de la déflexion du rail et de 9 % son écart-type. Les densités de probabilité de  $M_3 = R_d$  représentées sur la figure 4.11 illustrent graphiquement ces résultats.

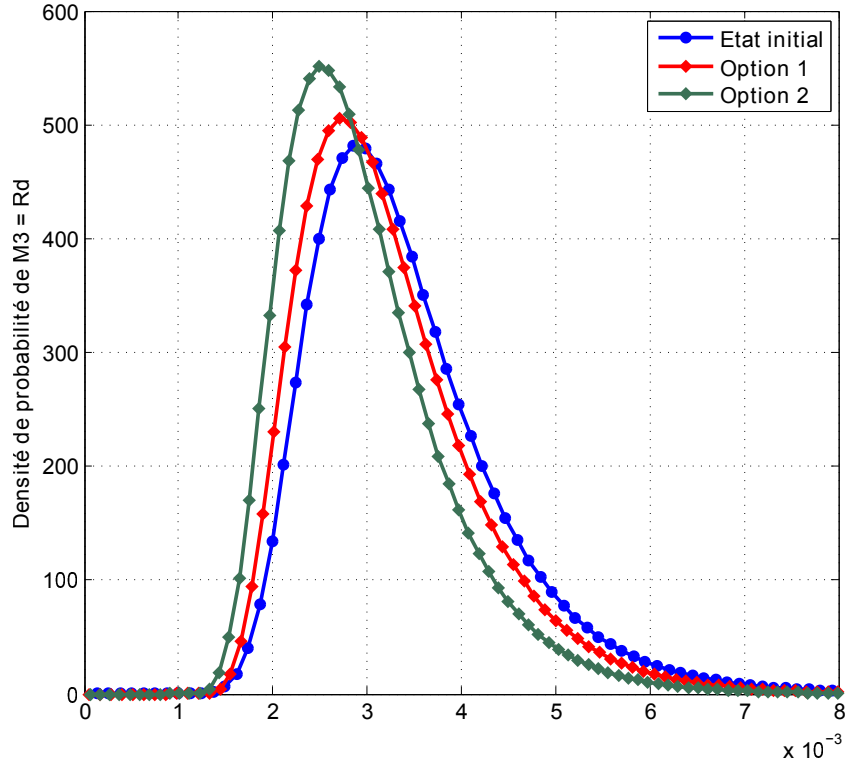


FIGURE 4.11: Densité de probabilité de  $M3 = R_d$  avant et après traitement de la sous-couche.

#### Effet sur la déflexion de traverse ( $S_d$ )

Nous donnons dans le tableau 4.14, pour chaque option, les valeurs des deux premiers moments statistiques de la déflexion de la traverse  $M_1 = S_d$ , ainsi que l'amélioration observée par rapport à l'état initial (%).

			Amélioration (%)
Option 1	Moyenne (m)	$2,737 \cdot 10^{-3}$	8,7
	Écart-type (m)	$9,580 \cdot 10^{-4}$	10
Option 2	Moyenne (m)	$2,543 \cdot 10^{-3}$	15,14
	Écart-type (m)	$8,604 \cdot 10^{-4}$	19,1

TABLE 4.14: Statistiques de  $M1 = S_d$  après une opération de après traitement de la sous-couche.

De même que pour la déflexion du rail, nous pouvons observer une amélioration relative de la moyenne et de la dispersion de la déflexion de traverse, tant pour l'option 1 que pour l'option 2. Cette nette amélioration est clairement mise en évidence sur les densités de probabilité de  $M_1 = S_d$  relatives à chaque état de compactage (figure 4.12).

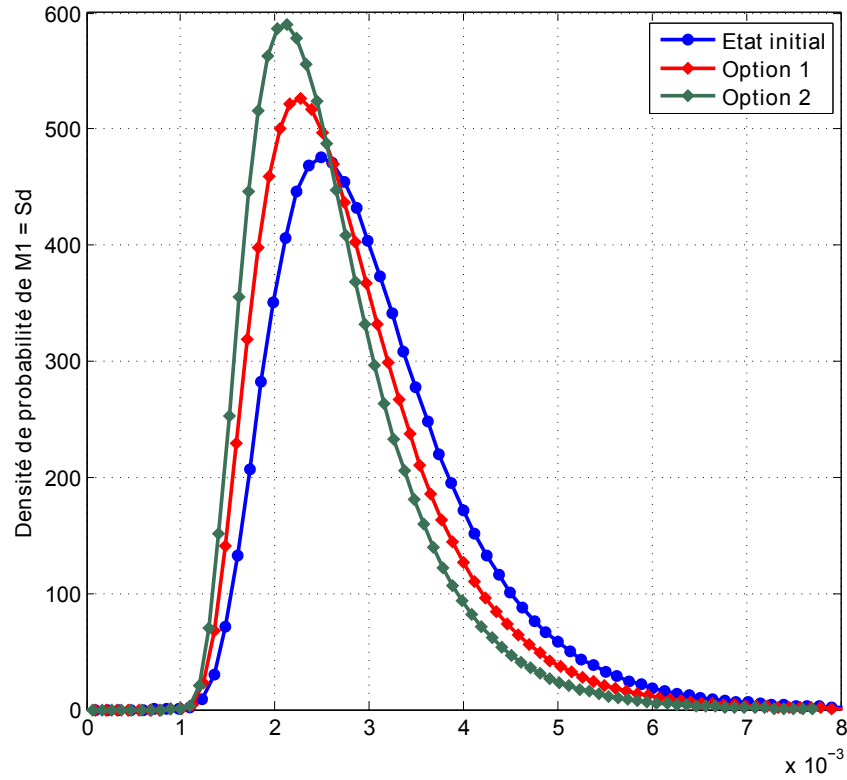


FIGURE 4.12: Densité de probabilité de  $M_1 = S_d$  avant et après traitement de la sous-couche.

#### Effet sur l'accélération de traverse ( $S_a$ )

Dans le tableau 4.15, pour chaque option, sont données les valeurs obtenues des deux premiers moments statistiques de l'accélération de traverse  $M_2 = S_a$ , ainsi que l'amélioration observée par rapport à l'état initial (%).

			Amélioration (%)
Option 1	Moyenne ( $m/s^2$ )	8,851	16,6
	Écart-type ( $m/s^2$ )	1,999	30,8
Option 2	Moyenne ( $m/s^2$ )	8,20	23,19
	Écart-type ( $m/s^2$ )	1,527	47,18

TABLE 4.15: Statistiques de  $M_2 = S_a$  après traitement de la sous-couche.

Les résultats obtenus, ainsi que les densités de probabilité (figure 4.13) montrent que les opérations de traitement de la sous-couche permettent de réduire très significativement la moyenne et la dispersion de l'accélération de traverse. Les gains observés sont logiquement plus importants avec un niveau de compactage plus élevé (option 2).



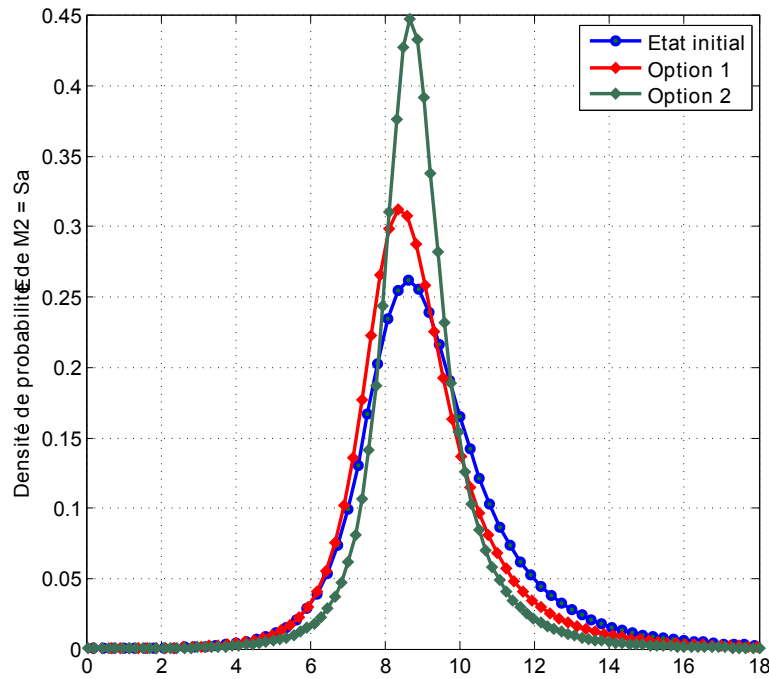


FIGURE 4.13: Densité de probabilité de  $M_2 = S_a$  avant et après traitement de la sous-couche.

## Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié l'influence d'une simulation d'opération de traitement de la sous-couche sur la réponse de la voie. Les résultats obtenus par les applications présentées dans cette partie montrent que le traitement de la sous-couche permet de réduire les moyennes et les dispersions des variables de contrôle de manière considérable par rapport à l'état initial de référence et même après les opérations de relevage.

L'apport de ce type d'opération de maintenance est augmenté avec le niveau de compactage imposé lors de la pose de la sous-couche. Cependant, il est difficile d'imposer un niveau de compactage permettant d'avoir une moyenne du module de Young égale à 70 MPa pour la sous-couche (option 2) sans que les caractéristiques de la couche de forme ne soient modifiées.

### 4.3.3 Traitement de la plate-forme par amélioration des conditions de drainage

La présence d'eau est nuisible à la tenue de la plate-forme ferroviaire et peut engendrer des risques liés à la sensibilité à l'état hydrique des matériaux constitutifs. Une des opérations d'amélioration de la qualité de la voie est la collecte et l'évacuation des eaux internes, c'est-à-dire le drainage. Celui-ci a pour fonction d'éviter la stagnation des eaux de pluie s'écoulant sur la plate-forme, des eaux de ruissellement des talus et des bassins versants et des eaux internes éventuellement (figure 4.14). On trouve deux types de drainage :

- les drainages à ciel ouvert, qui consistent en des fossés revêtus ou non de béton, des cunettes ou des caniveaux,
- les drainages enterrés, qui sont constitués d'éléments préfabriqués, collecteurs drainants et buses. Ils comportent une partie drainante pour capter les eaux et une partie permettant l'écoulement de ces dernières vers un exutoire.



FIGURE 4.14: Exemple d'opération d'exécution de fossés de drainage.

L'amélioration des conditions de drainage entraîne une amélioration de la qualité de la plate-forme ferroviaire et plus particulièrement des caractéristiques mécaniques de celle-ci [48]. Nous estimons ici que la couche de forme et la sous-couche sont les composantes les plus concernées. Un meilleur drainage de ces deux couches se traduira par une amélioration des caractéristiques statistiques de leurs modules d'élasticités, c'est-à-dire par une augmentation des moyennes et une diminution des écart-types de ces modules. Le tableau 4.16 montre l'évolution de ces caractéristiques après l'opération de drainage considérée dans cette application.

	Paramètre aléatoire	Moyenne	Ecart-type
Avant drainage	$Y_1 = h_b$	0, 26 m	0,11 m
	$Y_5 = E_b$	38,91 MPa	11,27 MPa
	$Y_6 = E_{sb}$	26,55 MPa	18,27 MPa
	$Y_7 = E_f$	19 MPa	5,84 MPa
Après drainage	$Y_1 = h_b$	0,26 m	0,11 m
	$Y_5 = E_b$	38,91 MPa	11,27 MPa
	$Y_6 = E_{sb}$	<b>40 MPa</b>	<b>8 MPa</b>
	$Y_7 = E_f$	<b>30 MPa</b>	<b>3 MPa</b>

TABLE 4.16: Caractéristiques de la plate-forme ferroviaire avant et après une opération de drainage.

### Effet sur le $\tilde{N}L$

Nous donnons dans le tableau 4.17 les valeurs obtenues des deux premiers moments statistiques de la déflexion du rail  $M_4 = \tilde{N}L$ , ainsi que l'amélioration observée par rapport à l'état initial (%).

		Amélioration (%)
Moyenne (m)	$1,892 \cdot 10^{-4}$	1,6
Écart-type (m)	$6,537 \cdot 10^{-5}$	18,9

TABLE 4.17: Statistiques de  $M_4 = \tilde{N}L$  après l'opération de drainage.

Nous remarquons que cette opération a peu d'impact sur la moyenne du  $\tilde{N}L$ , l'amélioration ne dépassant pas 2 %. Par contre, une variation plus importante est observée sur l'écart-type (19 %) correspondant à une diminution de la dispersion de la répartition de l'indicateur de nivellement : le coefficient de variation passe de 42 % à 34 %.

Sur la figure 4.15 est représentée la densité de probabilité de  $M_4 = \tilde{N}L$  avant et après une opération de drainage. Bien que la moyenne du  $\tilde{N}L$  ne soit pas très affectée par le drainage, on peut s'apercevoir qu'il n'en est pas de même de la loi de cette variable aléatoire, du fait de la variation importante de son écart-type.

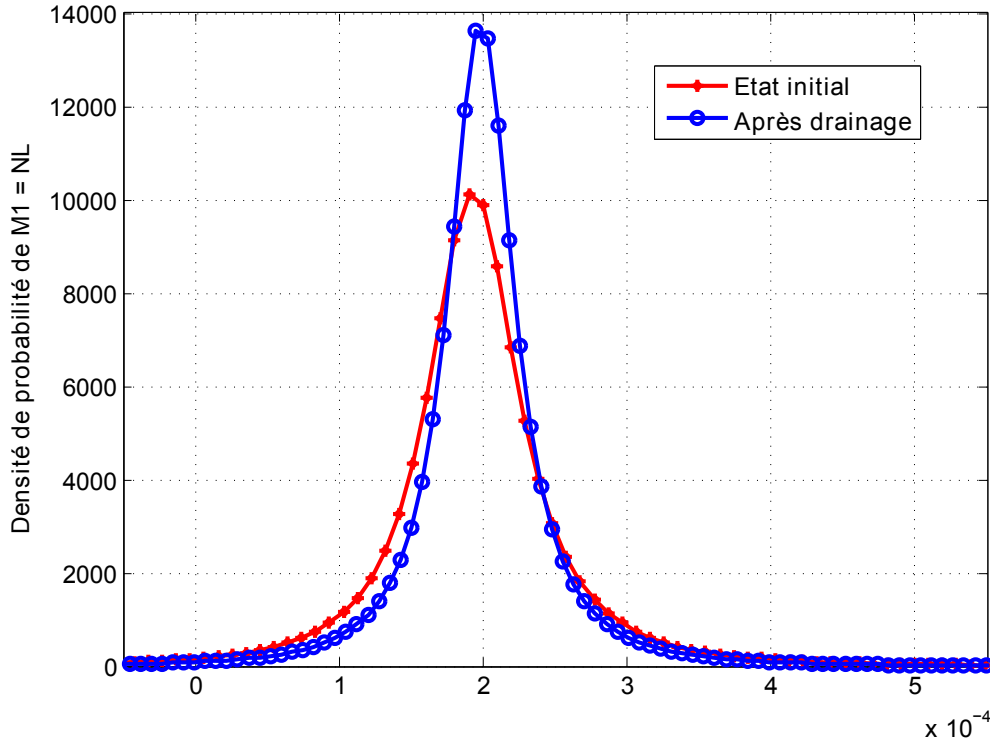


FIGURE 4.15: Densité de probabilité de  $M_4 = \tilde{N}L$  (m) avant et après l'opération de drainage.

### Effet sur la déflexion du rail ( $R_d$ )

Nous donnons dans le tableau 4.18 les valeurs des deux premiers moments statistiques obtenues pour la déflexion du rail  $M_3 = R_d$ , ainsi que l'amélioration observée par rapport à l'état initial (%).

		Amélioration (%)
Moyenne (m)	$2,391 \cdot 10^{-3}$	28,77
Écart-type (m)	$6,207 \cdot 10^{-4}$	40,86

TABLE 4.18: Statistiques de  $M_3 = R_d$  après l'opération de traitement de la couche de forme.

Nous remarquons une nette amélioration par rapport à l'état initial : diminution de la moyenne de 29 % et de 40 % pour l'écart-type. Ainsi la dispersion de la déflexion du rail est bien moins importante que celle relative à l'état initial. Cet effet s'explique par la sensibilité de la déflexion du rail aux modules de résistance des couches et en particulier à ceux de la sous-couche et de la couche de forme.

La figure 4.16 représente la densité de probabilité de  $M_3 = R_d$  avant et après l'opération de drainage. On voit clairement l'importance du drainage sur la loi de cette variable aléatoire.

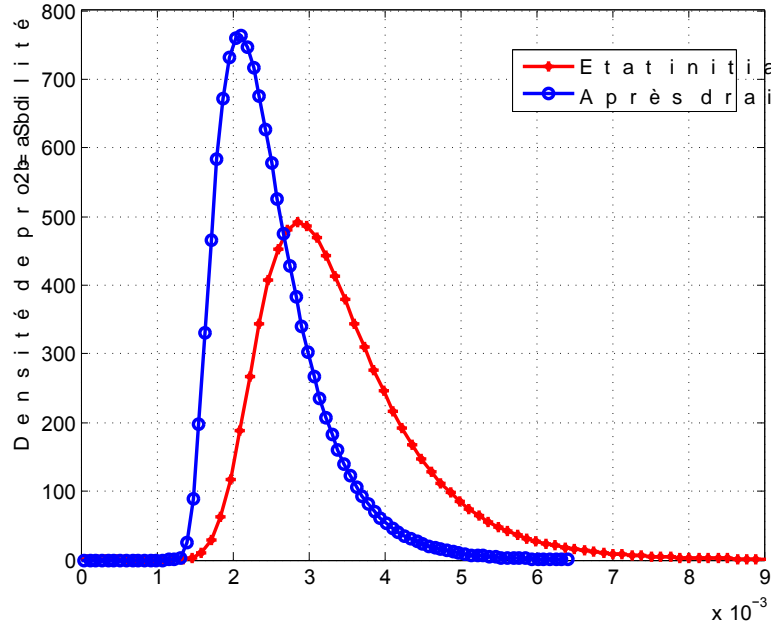


FIGURE 4.16: Densité de probabilité de  $M_3 = R_d$  avant et après l'opération de drainage.

#### Effet sur la déflexion de traverse ( $S_d$ )

Nous donnons dans le tableau 4.19 les valeurs obtenues des deux premiers moments statistiques de la déflexion de traverse  $M_1 = S_d$ , ainsi que l'amélioration observée par rapport à l'état initial (%).

		Amélioration (%)
Moyenne	$2,036 \cdot 10^{-3}$	32,05
Écart-type	$6,099 \cdot 10^{-4}$	42,30

TABLE 4.19: Statistiques de  $M_1 = S_d$  après une operation de traitement de la plate-forme.

Nous remarquons que les différents moments statistiques de  $M_1 = S_d$  ont diminué de façon considérable par rapport à l'état initial. La moyenne de la déflexion de la traverse passe de 2,997 à 2,036 mm soit une diminution d'environ 32 %, tandis que l'écart-type diminue de 42 %.

L'impact de drainage sur  $M_1 = S_d$  est encore plus visible sur la loi de cette v.a., comme le montre la figure 4.17 représentant la densité de probabilité de  $M_1 = S_d$  avant et après l'opération de drainage.

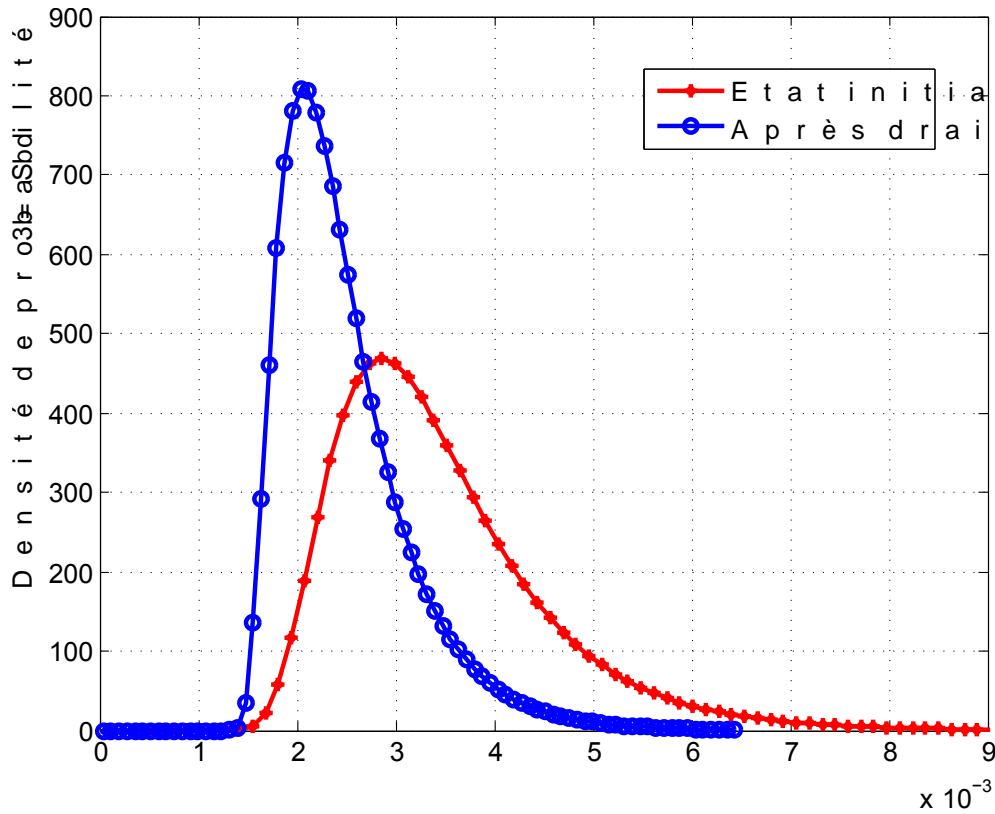


FIGURE 4.17: Densité de probabilité de  $M_1 = S_d$  avant et après l'opération de drainage.

#### Effet sur l'accélération de traverse ( $S_a$ )

Nous donnons dans le tableau 4.20 les valeurs des deux premiers moments statistiques de l'accélération de traverse  $M_2 = S_a$ , ainsi que l'amélioration observée par rapport à l'état initial (%).

		Amélioration (%)
Moyenne ( $m/s^2$ )	8,397	20,09
Écart-type ( $m/s^2$ )	2,173	24,82

TABLE 4.20: Statistiques de  $M_2 = S_a$  après l'opération de drainage.

Comme pour les deux variables de contrôle précédentes, on peut observer l'effet considérable du drainage sur la v.a.  $M_2 = S_a$ , tant au niveau de ses deux premiers moments que sur sa loi (cf. figure 18).

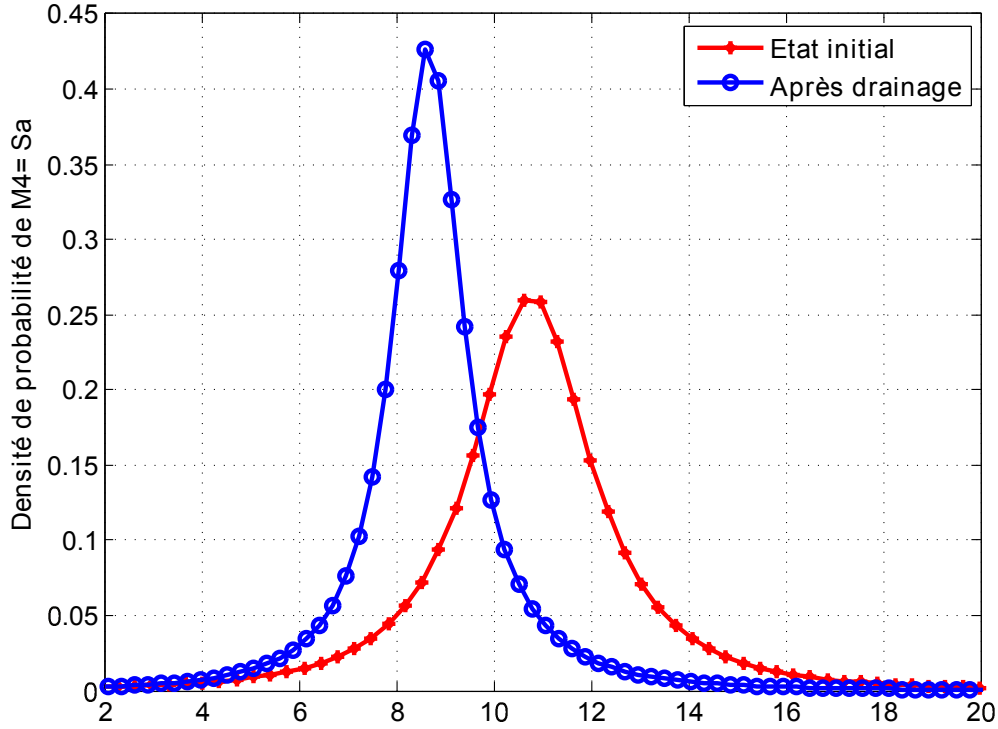


FIGURE 4.18: Densité de probabilité  $M_2 = S_a$  avant et après l'opération de drainage.

## Conclusion

Dans cette partie, nous avons examiné l'influence d'une opération de traitement de la plate-forme ferroviaire sur la réponse de la voie. On constate qu'une opération de drainage, que nous avons modélisé par une augmentation du module de Young des couches intermédiaires, entraîne une amélioration significative des paramètres analysés. La variable de contrôle  $M_4 = \tilde{N}L$  semble peu influencée par une telle opération. Cet effet est bénéfique en ce sens qu'il réduit dans tous les cas la dispersion de ces variables en améliorant leur moyenne. Nous avons pu également remarquer que cette opération avait un effet sur les variables de contrôle plus important que celui de l'opération de relevage. Ceci est dû au fait que, dans le cas d'une opération de drainage, on améliore la qualité des caractéristiques mécaniques de la sous-couche et de la couche de forme, qui sont des paramètres ayant une grande influence sur la réponse du système. Cependant, une opération de drainage est techniquement plus compliquée qu'une opération de bourrage et/ou de relevage, et surtout plus coûteuse.

Dans ce type d'analyse, il est difficile d'estimer d'avance l'impact d'une opération de maintenance sur les caractéristiques de la voie. Afin d'estimer les variations qui accompagnent les opérations sur le site de Chambéry, nous nous sommes basés sur les caractéristiques d'autres sites jugés de meilleure qualité que ce dernier et parfois sur des hypothèses que nous avons choisies aussi réalistes que possible.

## 4.4 Analyse fiabiliste d'un tronçon de voie ferrée

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'analyse fiabiliste du modèle de voie ferrée introduit dans le chapitre 3. Cette analyse est effectuée en utilisant la méthode FORM pour le calcul de l'indice de Hasofer-Lind  $\beta_{HL}$  et de la probabilité de défaillance. Le calcul de  $\beta_{HL}$  selon cette méthode nécessite l'emploi d'un algorithme d'optimisation non-linéaire sous contrainte. Nous avons utilisé l'algorithme classique de Rackwitz-Fiessler. Rappelons que, dans la stratégie FORM, la probabilité  $P_f$  est approximée par  $P_f \simeq \Phi(-\beta_{HL})$ . Nous évaluerons également cette probabilité par une méthode de Monte-Carlo basée sur la surface de réponse lagrangienne approximante développée dans la procédure de collocation stochastique.

#### 4.4.1 Position du problème, données

La gestion de la maintenance de l'infrastructure sous forme de contrat client-fournisseur a fait apparaître un ensemble de normes constituant la base des référentiels qualité de maintenance de la voie. Elles permettent une plus juste interprétation des mesures à prendre. Pour chaque paramètre de la géométrie et chaque constituant et assemblage de la voie, des seuils sont définis à partir desquels un ensemble de mesures peuvent être pris :

- les valeurs de ralentissement (VR) à partir desquelles des mesures de restriction de vitesses de circulation sont à prendre,
- les valeurs d'intervention (VI) imposant une intervention dans un délai relativement court pour que le seuil VR ne soit pas atteint,
- les valeurs d'alertes (VA) imposant une surveillance ou une intervention programmée à moyen terme.

Afin de maintenir les performances des voies et de garantir la sécurité, des actions de maintenance sont à entreprendre avant que le seuil VR ne soit atteint.

Le contrôle de la qualité de la voie est souvent effectué à l'aide d'appareils de type Mauzin. Les tournées régulières de la voiture Mauzin permettent l'inspection et la détection des défauts de voie. Les seuils sont de leur côté évalués par rapport aux mesures Mauzin.

Le passage des mesures Mauzin aux défauts de voie se fait dans le cadre de l'analyse spectrale de signaux. Le calcul des fonctions de réponse impulsionnelles à partir des fonctions de transfert est effectué en utilisant un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT). Ces fonctions de transfert sont spécifiques à chaque type de voiture Mauzin.

Pour toutes les applications considérées dans cette partie, nous nous limitons à deux critères de défaillance liés à la déflexion du rail et à l'accélération de traverse. Bien que pour la déflexion du rail, nous disposions d'une valeur maximale admissible  $\overline{R_d} = 6,8 \text{ mm}$ , nous analyserons la probabilité de défaillance en fonction du seuil admissible. Les valeurs de ce seuil sont  $\overline{R_d} = 4, 8, 10, 12 \text{ mm}$ . Pour l'accélération de la traverses, nous testons la variation de la probabilité de défaillance pour les seuils suivants :  $\overline{S_a} = 8, 10, 12, 15, 20 \text{ ms}^{-2}$ . Ces deux cas d'analyse sont désignés sous les appellations : critère 1, dans le cas où la défaillance est liée à la déflexion du rail et critère 2 dans le cas où la défaillance est liée à l'accélération de la traverse.

Les v.a. de l'étude sont les paramètres  $Y_1 = h_b$ ,  $Y_5 = E_b$ ,  $Y_6 = E_{sb}$  et  $Y_7 = E_f$ . Ces v.a. sont supposées lognormales, de moyenne et d'écart-type donnés, et deux cas sont considérés concernant leur lien statistique : le cas totalement décorréolé et le cas corrélé avec une matrice de covariance spécifié. Donc, dans les deux cas le vecteur aléatoire  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_5, Y_6, Y_7)^T$  est entièrement caractérisé. Le tableau 4.21 donne les moyennes et les écart-types des v.a.  $Y_i$  dans la situation initiale de référence. Le tableau 4.22 donne les valeurs des coefficients de corrélation  $C_{Y_i, Y_j}$  des couples  $(Y_i, Y_j)$ . Ces valeurs sont issues des mesures *in situ* sur le site de Chambéry.

Paramètre aléatoire	Moyenne	Ecart-type
$Y_1 = h_b$	0,26 m	0,11 m
$Y_5 = E_b$	38,91 MPa	11,27 MPa
$Y_6 = E_{sb}$	26,55 MPa	18,27 MPa
$Y_7 = E_f$	9,21 MPa	5,84 MPa

TABLE 4.21: Moyennes et écarts-types des paramètres aléatoires dans la situation initiale de référence.

	$Y_1$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$
$Y_1$	100	20	50	85
$Y_5$	–	100	15	17
$Y_6$	–	–	100	44
$Y_7$	–	–	–	100

TABLE 4.22: Valeurs des coefficients de corrélation  $C_{Y_i, Y_j}(\%)$  des couples  $(Y_i, Y_j)$ .

Compte tenu des critères de défaillance adoptés, les fonctions d'états limites associées  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} : y \rightarrow F(y)$  s'écrivent,  $\forall y \in \mathbb{R}^4$  :

- Critère 1 :  $F(y) = R_d(\mathbf{y}) - \overline{R_d}$ ,
- Critère 2 :  $F(y) = S_a(\mathbf{y}) - \overline{S_a}$ .

où  $\mathbf{y} = (y_1, y_5, y_6, y_7)^T$  est le vecteur des paramètres aléatoires. Il s'agit alors de calculer, dans les deux applications, l'indice de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ) et la probabilité de défaillance  $P_f$  associés à chaque performance (cf. chapitre 3). Le calcul de  $\beta_{HL}$  est effectué à l'aide de l'algorithme d'optimisation de Rackwitz-Fiessler. Pour le calcul de  $P_f$ , trois voies sont utilisées :

- l'approche FORM qui fournit une approximation de  $P_f$  sous la forme :

$$P_f \simeq \Phi(-\beta_{HL})$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi normale réduite sur  $\mathbb{R}$ ,

- l'approche couplant FORM/MEFS, où la méthode FORM est appliquée à l'approximation lagrangienne issue de la méthode de collocation stochastique :  $P_f$  est aussi approximée par :  $P_f \simeq \Phi(-\beta_{HL})$ ,
- l'approche Monte-Carlo, appliquée en substituant à la fonction mécanique non-linéaire de base son approximation lagrangienne issue de la méthode de collocation stochastique.

Rappelons que tous les calculs sont en fait menés dans l'espace standard, une fois le vecteur  $\mathbf{Y}$  transformé, via une transformation  $T$  appropriée, en un vecteur gaussien standard  $\mathbf{X}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^4$ . Exprimée en fonction de  $\mathbf{X}$ , la performance  $U$  s'écrit :

- Critère 1 :  $U = \Gamma(\mathbf{X}) = \mathcal{R}_d(\mathbf{X}) - \overline{R_d}$
- Critère 2 :  $U = \Gamma(\mathbf{X}) = \mathcal{S}_a(\mathbf{X}) - \overline{S_a}$

où  $\Gamma$ ,  $\mathcal{R}_d$  et  $\mathcal{S}_a$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\Gamma = F \circ T \quad , \quad \mathcal{R}_d = R_d \circ T \quad , \quad \mathcal{S}_a = S_a \circ T$$

L'objet des applications que nous allons présenter est de montrer comment il est possible d'évaluer en terme fiabiliste l'apport d'une opération de maintenance. A cet effet, trois applications sont considérées :

1. une opération de relevage de la voie par injection de ballast, avec trois hauteurs de relevage : 5, 8 et 10 cm,
2. une opération de remplacement des couches de ballast et de la sous-couche, avec deux niveaux de compactage de la sous-couche retenus, désignés sous les appellations : option 1 et option 2,
3. une opération de drainage.

#### 4.4.2 Estimation fiabiliste de l'état initial de référence

Nous commençons cette étude par analyser l'effet du lien statistique entre les v.a. de l'étude ( $Y_1 = h_b$ ,  $Y_5 = E_b$ ,  $Y_6 = E_{sb}$  et  $Y_7 = E_f$ ) sur la probabilité de défaillance du système. Deux cas sont considérés concernant leur lien statistique : le cas totalement décorrélié et le cas corrélé avec une matrice de covariance spécifiée (cf. tableau 4.22). Cette étude sera examinée en considérant la fonction d'état limite suivante :



$$F(\mathbf{y}) = R_d(\mathbf{y}) - \overline{R_d} \quad (4.5)$$

avec  $\overline{R_d} = 6,8 \text{ mm}$ .

Comme indiqué dans le paragraphe précédent, les probabilités de défaillance sont évaluées de trois façons différentes : la méthode FORM, la méthode FORM couplée à la surface de réponse (FORM /MEFS) et la méthode de Monte-Carlo sur la surface de réponse avec un nombre de simulations égal à  $10^6$ . Les différents résultats obtenus sont donnés dans le tableau 4.23.

	Monte-Carlo	FORM		FORM / MEFS	
	$P_f$	$\beta_{HL}$	$P_f$	$\beta_{HL}$	$P_f$
Paramètres corrélés	0,0625	1,5182	0,0644	1,4974	0,0671
Paramètres non corrélés	0,0451	1,6526	0,0492	1,6558	0,0489

TABLE 4.23: Indice de Hasofer-lind ( $\beta_{HL}$ ) et probabilité de défaillance pour les cas analysés.

Les valeurs de la probabilité de défaillance obtenues par les trois méthodes montrent la sensibilité de ce dernier aux liens statistiques entre les différentes v.a.. La différence pour la probabilité de défaillance entre le cas de paramètres corrélés et non corrélés est de 25 %, ce qui implique que, dans ce genre d'application, il est important de prendre en compte, en plus des données caractéristiques de chaque paramètre, les liens statistiques qui peuvent exister entre eux. Dans cette application, la non prise en compte de ces corrélations donne des valeurs de la probabilité de défaillance inférieures à celles obtenues en considérant la corrélation entre les v.a.. Dans la suite de ce paragraphe, nous considérerons que les v.a. sont corrélées.

D'autre part, les valeurs des probabilités de défaillance obtenues par les trois approches proposées montrent que les écart relatifs sont inférieurs à 7 %. En tenant compte de ce facteur temps en plus des écarts relatifs observés, nous nous limiterons dans les applications qui suivent aux deux approches FORM/MEFS et/ou Monte-Carlo.

Dans le tableau 4.24 sont données les valeurs de la probabilité de défaillance, pour le cas d'étude proposé, en considérant les deux cas de critères de défaillance :

- Critère 1 :  $F(\mathbf{y}) = R_d(\mathbf{y}) - \overline{R_d}$ ,
- Critère 2 :  $F(\mathbf{y}) = S_a(\mathbf{y}) - \overline{S_a}$ .

Pour le critère 1, les valeurs de ce seuil sont  $\overline{R_d} = 4, 6, 8, 10$  et  $12 \text{ mm}$ . Dans le cas du critère 2 les valeurs seuils de  $\overline{S_a}$  sont prises égales à  $8, 10, 12, 15$  et  $20 \text{ ms}^{-2}$ .

Les probabilités de défaillance  $P_f$  sont évaluées par la méthode FORM/MEFS et Monte-Carlo. Il est à signaler ici que pour le cas de l'évaluation de la probabilité de défaillance par la méthode de Monte-Carlo, une attention particulière a été prêtée dans le cas où les probabilités de défaillance sont faibles, en augmentant le nombre de simulations à  $10^8$ .

	seuil	FORM / MEFS		Monte-Carlo	Ecart relatif $P_f$ (%)
		$\beta_{HL}$	$P_f$	$P_f$	
critère 1	4	0,79180	0,18376	0,187936	2,22
	6,8	1,4974	0,0671	0,0625	4,28
	8	2,7790	0,00272638	0,002631584	3,60
	10	3,3507	0,00041	0,000392763	4,38
	12	3,8007	0,00006	0,00006488	7,52
critère 2	8	0,4369	0,33109196	0,32333	2,40
	10	0,79804	0,21242357	0,20129	5,53
	12	1,4369	0,0753725	0,076233	1,12
	15	2,0336	0,0209959	0,021123	0,60
	20	2,6485	0,00404253	0,00399512	1,18
	25	3,4162	0,00031756	0,00028759	10,43

TABLE 4.24: Indice de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ) et probabilité de défaillance  $P_f$  pour les cas analysés.

La comparaison entre les probabilités de défaillance  $P_f$  obtenues par FORM/MEFS et par simulations de Monte-Carlo sur la surface de réponse montre que l'écart relatif reste faible et a une tendance à croître avec le seuil de défaillance.

Sur les figures 4.19 et 4.20 sont représentées respectivement les évolutions des probabilités de défaillance  $P_f$  en fonction des seuils maximaux de défaillance pour le cas de critère  $F(\mathbf{y}) = R_d(\mathbf{y}) - \overline{R_d}$  et  $F(\mathbf{y}) = S_a(\mathbf{y}) - \overline{S_a}$  respectivement.

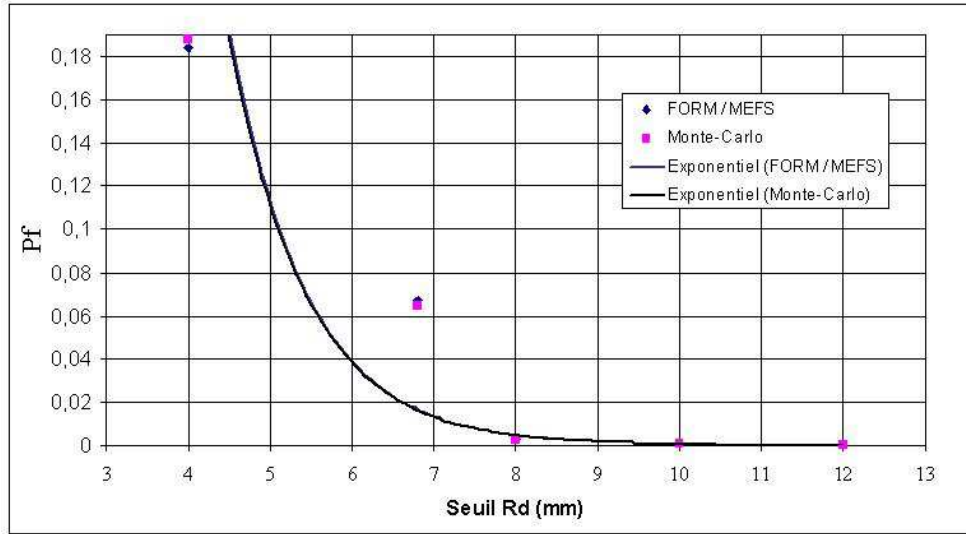


FIGURE 4.19: Evolution de la probabilité de défaillance avec le niveau de relevage pour le critère 1.

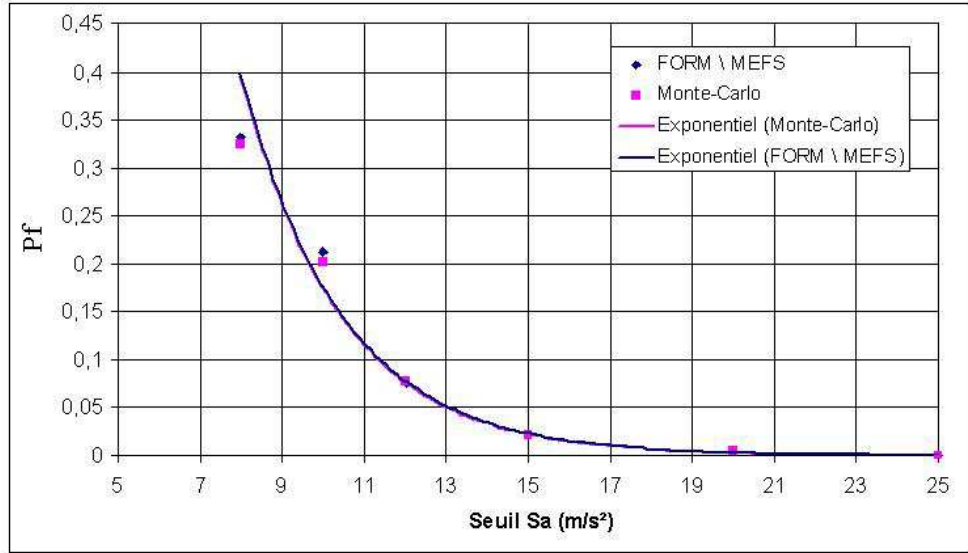


FIGURE 4.20: Evolution de la probabilité de défaillance avec le niveau de relevage pour le critère 2.

Les résultats obtenus montrent que l'évolution de la probabilité de défaillance en fonction du seuil de défaillance a une tendance exponentielle décroissante. L'intérêt de ce genre d'analyse paramétrique est de fournir des seuils maximaux, dans le cas où ces derniers ne sont pas fixés. Ce seuil peut correspondre à une valeur de probabilité de défaillance fixée (5 % par exemple).

Dans les applications que nous allons présenter par la suite, nous évaluons l'apport des opérations de maintenance de la voie, en termes fiabilistes, par rapport à l'état initial de référence. Cette évaluation sera réalisée sur la base des deux critères de défaillances suivants :

- Critère 1 :  $F(y) = R_d(y) - \overline{R_d}$ , avec  $\overline{R_d} = 6,8 \text{ mm}$ .
- Critère 2 :  $F(y) = S_a(y) - \overline{S_a}$ , avec  $\overline{S_a} = 12 \text{ ms}^{-2}$ .

#### 4.4.3 Estimation fiabiliste de l'effet de relevage de la voie

Les valeurs des probabilités de défaillance avant et après relevage de la voie obtenues par le couplage FORM/MEFS et par Monte-Carlo correspondant à chaque cas de relevage sont données dans le tableau 4.25.

		FORM / MEFS			Monte-Carlo	
		$\beta_{HL}$	$P_f$	Réduction	$P_f$	Réduction
Critère 1	État initial	1,4974	0,0671		0,0625	
	Relevage 5 cm	1,5127	0,0652	2,83	0,0614	1,76
	Relevage 8 cm	1,5286	0,0632	5,81	0,0593	5,12
	Relevage 10 cm	1,5487	0,0607	9,46	0,0573	8,32
Critère 2	État initial	1,4369	0,0753		0,0762	
	Relevage 5 cm	1,7746	0,0379	49,66	0,0382	49,86
	Relevage 8 cm	1,8298	0,0336	55,37	0,0319	58,13
	Relevage 10 cm	2,0192	0,0217	71,18	0,0205	73,09

TABLE 4.25: Indice de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ) et probabilité de défaillance  $P_f$  pour les cas analysés.

Nous remarquons que la probabilité de défaillance pour le critère de défaillance 1 est relativement faible (0,0671) mais non négligeable. Une opération de relevage permet de réduire de 2,83 % à 5 cm et de 9,46 % à 10 cm la probabilité de défaillance. Ceci est dû au fait que le critère de défaillance retenu

ici est lié à la déflexion au niveau du rail. Or, ce paramètre a une faible sensibilité aux caractéristiques de la couche de ballast, modifiée lors d'une opération de relevage. Ce gain est aussi relativement faible par rapport au coût de l'opération. Pour le critère 2, l'apport des opérations de relevage permet de diminuer d'une façon considérable la probabilité de défaillance : cette réduction est de près de 73 % pour un relevage de 10 cm.

Les évolutions des probabilité de défaillance pour le critère 1 et le critère 2 sont données respectivement sur les figure 4.21 et 4.22. Comme nous l'avons remarqué dans la partie précédente, l'accélération de la traverse est plus sensible à la variation du niveau de relevage que la déflexion du rail.

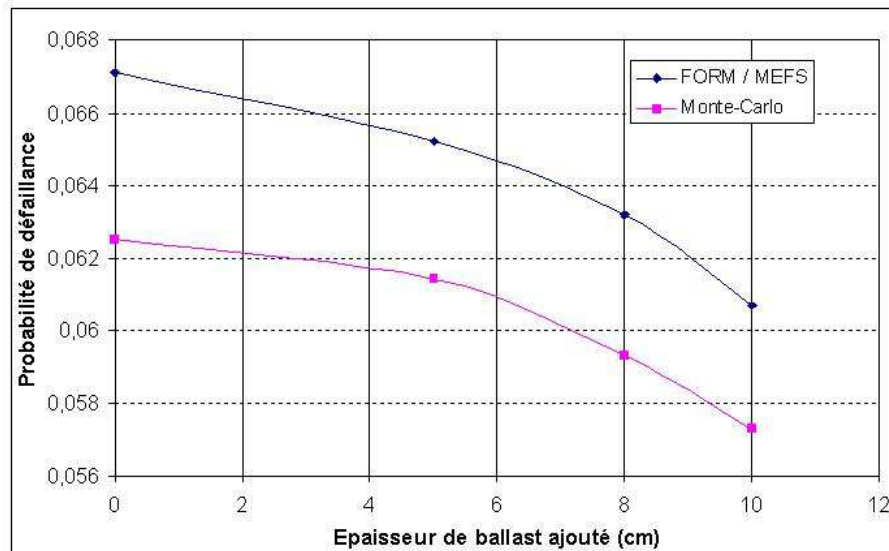


FIGURE 4.21: Evolution de la probabilité de défaillance avec le niveau de relevage correspondant au critère 1.

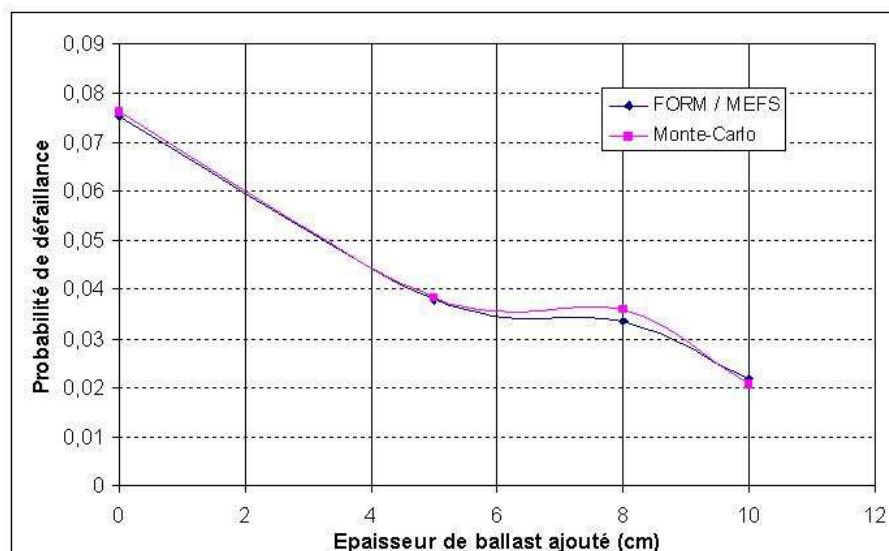


FIGURE 4.22: Evolution de la probabilité de défaillance avec le niveau de relevage correspondant au critère 2.

#### 4.4.4 Estimation fiabiliste de l'effet du traitement de la sous-couche

Les valeurs des probabilités de défaillance avant et après traitement de la sous-couche obtenues par le couplage FORM/MEFS et par Monte-Carlo pour chaque cas et chaque option de compactage sont données dans le tableau 4.26.

		FORM / MEFS			Monte-Carlo	
		$\beta_{HL}$	$P_f$	Réduction	$P_f$	Réduction
Critère 1	État initial	1,4974	0,0671		0,0625	
	Option 1	1,6417	0,05036	24,94	0,0522	16,14
	Option 2	1,8717	0,03065	54,32	0,0341	45,44
Critère 2	État initial	1,4369	0,0753		0,0762	
	Option 1	1,639	0,0506	32,80	0,0466	38,84
	Option 2	1,955	0,02529	66,41	0,0193	74,67

TABLE 4.26: Indice de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ) et probabilité de défaillance pour les cas analysés.

Les résultats obtenus dans cette application montrent que le traitement de la sous-couche accompagné d'un renouvellement de la couche de ballast permet de réduire la probabilité de défaillance pour le critère 1, liée à la déflexion du rail, de 25 % avec un niveau de compactage moyen de la sous-couche et de plus de 50 % pour un niveau de compactage plus important (option 2). De la même façon, les probabilités de défaillance sont réduites de façon plus importante dans le cas du critère 2. Ceci est dû au fait que l'accélération de la traverse est plus sensible aux variations accompagnant ce type d'opération de maintenance, comme nous l'avons remarqué dans la partie précédente.

D'une façon générale, le traitement de la sous-couche est plus bénéfique, en terme fiabiliste, pour la tenue du modèle de voie analysé, que les opérations de relevage de la voie.

#### 4.4.5 Estimation fiabiliste de l'effet du drainage

Les valeurs des probabilités de défaillance avant et après drainage obtenues par le couplage FORM/MEFS et par Monte-Carlo pour chaque cas d'analyse sont données dans le tableau 4.27.

		FORM / MEFS			Monte-Carlo	
		$\beta_{HL}$	$P_f$	Réduction	$P_f$	Réduction
Critère 1	État initial	1,4974	0,0671		0,0625	
	Après drainage	2,8657	0,0021	96,87	0,0018	97,12
Critère 2	État initial	1,4369	0,0753		0,0762	
	Après drainage	2,7699	0,0028	96,28	0,0023	96,32

TABLE 4.27: Indice de Hasofer-Lind ( $\beta_{HL}$ ) et probabilité de défaillance pour les cas analysés.

Nous remarquons qu'une opération de traitement de la plate-forme, par une opération de drainage, permet de réduire de plus de 96 %, pour les critères de défaillance, la probabilité de dépasser les seuils fixés auparavant. L'apport de ce type d'opération en terme de sécurité est évident. Il est essentiellement dû au fait que ce type d'opération améliore la qualité des paramètres considérés comme étant les plus influents sur le comportement de la voie.

#### 4.4.6 Conclusion

Nous avons présenté, dans cette partie, des applications permettant d'évaluer l'apport des opérations de maintenance de la voie en termes fiabilistes. A cet effet, trois opérations sont considérées.

La première est basée sur le relevage de la voie par injection de ballast : dans cette application, nous avons considéré trois hauteurs de relevage : 5, 8 et 10 cm. La deuxième consiste au remplacement de la sous-couche avec deux niveaux de compactage lors de la pose. Enfin une opération de drainage a été examinée.

L'analyse de la défaillance du modèle mécano-numérique d'un tronçon de voie ferrée est effectuée en analysant la probabilité de dépassement de valeurs seuils admissibles de déflexion du rail et un autre critère lié au dépassement d'un seuil d'accélération maximale de la traverse, que nous nous sommes fixé en absence de valeurs maximales réglementaires. Ces applications ont permis de quantifier, pour chaque cas considéré, l'apport des opérations de maintenance. Elle a mis en évidence l'apport des opérations de drainage sur la tenue de la voie comparées aux deux autres opérations de maintenance. Il est clair que les probabilités de dépassement du seuil liées à l'accélération sont plus sensibles à ces opérations que celles liées à la déflexion du rail : les réductions des probabilités de défaillance sont plus importante pour le critère 2 comparées aux résultats obtenus en considérant le critère 1.

## 4.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une analyse paramétrique de la voie ferrée en utilisant la méthode de collocation stochastique. La première partie de cette analyse a permis de mettre en évidence l'importance des paramètres mécaniques du modèle dans la propagation d'incertitude. L'analyse stochastique du modèle de voie ferrée a consisté dans un premier temps à analyser la propagation de l'incertitude à travers le modèle. Cette analyse a permis de déterminer les paramètres dont la variabilité a le plus d'influence sur la variabilité de la réponse et d'éliminer les paramètres de faible influence pour les applications étudiées ensuite.

Dans la seconde partie, nous avons mené une analyse paramétrique ayant pour objectif de quantifier l'apport d'opérations de maintenance de type relevage de la voie par injection de ballast, traitement de la sous-couche avec renouvellement du ballast et opération de traitement de la plate-forme simulant l'amélioration des conditions de drainage. Cette analyse a montré un grand apport des deux derniers types de traitement en terme de diminution de la dispersion de la réponse du modèle et surtout de réduction considérable des risques de défaillance. L'apport des opérations d'amélioration des conditions de drainage est plus bénéfique pour le comportement de la voie en terme de sécurité. Les applications présentées dans cette partie ont montré la possibilité de fixer des seuils maximum en phase de conception en utilisant des analyses paramétriques permettant d'étudier l'évolution des probabilités de défaillance en fonction des paramètres d'entrée.

# CONCLUSION GENERALE & PERSPECTIVES

Le point de départ de ce travail est le projet européen Innotrack dont l'un des objectifs était de proposer des solutions permettant de réduire le coût du cycle de vie de la voie de 30 %. Or cet objectif nécessite une bonne compréhension du comportement de la voie et des phénomènes de dégradation. Cette dégradation se manifeste par une hétérogénéité des propriétés des composants de la voie, que ce soit pour les éléments constituant la superstructure (rail, traverses,...) ou pour l'infrastructure formée par les couches d'assise. Les opérations de maintenance, dont l'objectif principal est de corriger les défauts géométriques, sont parfois peu efficaces ou ont des effets de durée limitée. Il est donc important, pour mieux comprendre le comportement des voies ferrées, de s'intéresser aux problèmes liés à la variabilité qui affecte les voies afin de disposer d'un outil permettant de mieux évaluer les opérations de maintenance. Le recours aux outils de simulation numérique alimentés par des données reflétant la réalité du terrain s'est alors imposé.

Dans ce but, une méthode d'éléments finis stochastiques (MEFS) a été couplée avec un modèle structural représentant un tronçon de voie ferrée ballastée. L'objectif de ce couplage était d'analyser la sensibilité de la réponse du modèle, dans plusieurs configurations, à la variabilité de certains paramètres d'entrée. La stratégie proposée dans ce travail est basée sur la description de la variabilité des paramètres mécaniques et géométriques de la voie ferrée et en particulier de la partie infrastructure à l'aide de variables aléatoires. Les statistiques du terrain servent à alimenter un modèle mécano-numérique représentant un tronçon de voie ferrée et permettant de décrire la variabilité de la réponse de ce modèle.

Dans la première partie de ce travail, nous avons proposé une stratégie permettant de quantifier la variabilité des caractéristiques des voies ferrées. Nous nous sommes intéressés en particulier au cas du site de Chambéry où un certain nombre de mesures ont été effectuées dans le cadre du projet Innotrack. Un traitement statistique approprié a été proposé pour analyser des données provenant d'un couplage de mesures pénétrométriques par Panda et géo-endoscopiques et a permis de décrire la variabilité des épaisseurs et des modules de Young de chaque couche composant la structure de la voie ferrée. Nous avons ensuite présenté, dans le second chapitre, un modèle numérique développé pour analyser le comportement d'un tronçon de voie ferrée. Ce modèle est développé en utilisant la méthode des éléments finis à l'aide du code Cast3M. Nous avons procédé à la validation du modèle par rapport à un certain nombre de critères tels que les critères de Boussinesq et de Sauvage et sur la base de comparaisons des résultats numériques d'accélération et de déflexion à des mesures expérimentales. Les résultats des tests de validation ont donné satisfaction que ce soit en statique ou en dynamique.

Afin de prendre en compte la variabilité dans le modèle EF, nous avons présenté une méthode des éléments finis stochastique (MEFS) destinée à l'analyse probabiliste d'un modèle dynamique non-linéaire représentant une section de voie ferrée. Cette méthode est basée sur une procédure de collocation stochastique, permettant l'estimation des moments statistiques du processus réponse ou de toute variable de contrôle liée à ce processus. Elle est conçue pour étudier la propagation de l'incertitude qui entache les paramètres mécaniques et géométriques du modèle EF. Cette méthode a prouvé de

grandes possibilités d'application, d'une part pour la caractérisation de la propagation de l'incertitude, d'autre part pour les analyses fiabilistes. Le caractère non intrusif de la méthode de collocation ouvre la possibilité de couplages avec d'autres codes de calculs. Cependant, la prise en compte d'un nombre important de variables aléatoires conduit à une augmentation exponentielle des temps de calculs ; des pistes de solution peuvent être envisagées en faisant appel à des solutions telles que la méthode de Stroud [20] ou l'utilisation des chaos polynomiaux creux (sparse grid) [14].

Les applications menées dans le cadre de l'analyse mécano-probabiliste d'un modèle de voie ferrée ont permis, dans un premier temps, de mettre en évidence l'importance des paramètres mécaniques du modèle dans la propagation des incertitudes. Dans un second temps, nous avons mené une analyse paramétrique ayant pour objectif de quantifier l'apport de diverses opérations de maintenance : relevage de la voie par injection de ballast, traitement de la sous-couche avec renouvellement du ballast et opération de traitement de la plate-forme simulant l'amélioration des conditions de drainage. Cette analyse a montré le grand apport des deux derniers types de traitement en termes de diminution de la dispersion de la réponse du modèle et surtout de réduction des risques de défaillance. L'apport des opérations d'amélioration des conditions de drainage reste cependant plus bénéfique pour le comportement de la voie en terme de sécurité. Ce type d'étude permet d'analyser l'efficacité des opérations de maintenance des voies ferrées. Il peut être présenté comme un outil d'aide à la décision qui doit être toutefois adapté à chaque cas ou site analysé.

Cependant, un certain nombre de points restent à améliorer afin de disposer d'un outil robuste. Nous pensons qu'un effort doit être porté sur le modèle EF afin de disposer d'un modèle 3D mieux adapté au comportement des sols avec des lois rhéologiques de type Mohr-Coulomb par exemple. Ce type de loi de comportement n'a pas été testé dans le cadre de ce travail en raison de la non-prise en compte de ce type de loi par le code de calcul Cast3M ainsi qu'en l'absence de données expérimentales permettant de quantifier la variabilité des paramètres de ce type de loi. Avec la nouvelle génération du pénétromètre Panda (Panda3), il sera possible d'avoir des informations plus riches en particulier en ce qui concerne le module de Young [12]. Par ailleurs, des analyses de faisabilité d'un couplage des méthodes EF classiques avec des approches eulériennes [95], testées avec des modèles 3D ont été réalisées parallèlement à ce travail, mais n'ont pas été intégrées dans ce dernier faute de temps. Elles ont montré de grandes possibilités d'applications afin de prédire de comportement à long terme d'une structure ferroviaire sous chargement cyclique avec un coût de calcul raisonnable. Ce couplage permettra de se focaliser sur d'autres phénomènes liés au comportement à long terme, les problèmes de tassements différentiels par exemple.

Une autre perspective consisterait à envisager une modélisation de la variabilité spatiale des paramètres, ce qui passe par l'emploi de champs stochastiques. Ici encore se posera d'une part le problème des temps de calcul et d'autre part, et surtout, l'alimentation de ces modèles probabilistes par des données issues de mesure *in situ*.



# Bibliographie

- [1] Albrecht A., Etude et modélisation du comportement dynamique de la voie ferrée, Contribution au développement d'un modèle de voie sous CESAR. Rapport de stage, SNCF, 2005.
- [2] Alias J., La voie ferrée. Techniques de construction et d'entretien. Eyrolles ; 1984.
- [3] Al Shaer A., Analyse des déformations permanentes des voies ferrées ballastées - approche dynamique. Thèse de doctorat de l'ENPC, 2005.
- [4] Arbaoui H., Mesure de la déformabilité de sol en place avec un pénétromètre. Thèse de doctorat de l'université Blaise Pascal - Clermont-Fd II, 2005.
- [5] Au S.K., Beck J.L., Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 16, pp. 263-277, 2001.
- [6] Au S.K. , Beck J.L., A new adaptative importance sampling scheme for reliability calculations. Structural Safety, 21 : 135-158, 1999.
- [7] Auvinet G., Geotechnical properties. General report, Session B-2, Proceedings, sixth ICASP in Civil Engineering, CERRA-ICASP6, Mexico, pp 768-775, 1991.
- [8] Balmès E. et Leclère J-M., Structural Dynamics Toolbox Manual, Version 5.0, [www.sdtools.com](http://www.sdtools.com), 2002.
- [9] Balsan M., Pour un modèle mathématique de la voie ferrée moderne. Thèse de doctorat de l'ENPC, 1981.
- [10] Bano M., Imagerie de l'approche surface par géoradar. HDR de l'université Louis Pasteur Strasbourg I, 2000.
- [11] Baroth J., Bressollette P., Chauvière C., Fogli M., An efficient SFE method using Lagrange polynomials : application to nonlinear mechanical problems with uncertain parameters. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 2007 ; 196 : 4419-4429.
- [12] Benz M.A., Mesures dynamiques lors du battage du pénétromètre Panda 2. Thèse de doctorat de l'université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II, 2009.
- [13] Berggren E., Dynamic Track Stiffness Measurement A New Tool for Condition Monitoring of Track Substructure. KTH Engineering science Ph. D. Royal Institute of Technology Stockholm.
- [14] Blatman G., Sudret B., Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach, C R Méc 336 (6) (2008), pp. 518 - 523.
- [15] Bodin V., Comportement du ballast des voies ferrées soumises à un chargement vertical et latéral. Thèse de doctorat de l'ENPC, 2001.
- [16] Bongini E., Validation du logiciel Dynavoie 1.1. Rapport de stage, SNCF, juin 2004.
- [17] Boutet M., Pierre P. et Doré G., Elaboration de modèles mathématiques pour l'interprétation des données obtenues avec le pénétromètre dynamique. Groupe de recherche en ingénierie des chaussées - Département de génie civil - Faculté des sciences et de génie Université Laval. Rapport réalisé pour le compte du ministère des Transports, Canada, Août 2007
- [18] Breitung K., *Asymptotic approximation for multinormal integrals*. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 110, pp. 357 - 366, 1984.

- [19] Bressolette P., Fogli M., Chauvière C., A stochastic collocation method for large classes of mechanical problems with uncertain parameters. Prob Eng Mech. Doi :10.1016/j.probengmech.2010.01.002.
- [20] Bressolette Ph., Chauvière C., Baroth J., Fogli M., High-dimensional integration formulas for efficient SFE methods. 10th International Conference on Applications of Statistics and Probability, ICASP10, University of Tokyo (Japan), CD Rom (8p.), July 31-August 3, 2007.
- [21] Breul P., Bacconnet C. et Nicosia J., Diagnostic du ballast en voie : Etude géostatistique en vue d'optimiser les méthodes de reconnaissance Ligne TGV LN1 - PK 82.000/PK 88.000. Rapport d'étude CUST, Clermont-Ferrand II, 2008
- [22] Breul P., Caractérisation endoscopique des milieux granulaires couplée à l'essai de pénétration. Thèse de doctorat de l'université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 1999.
- [23] Casagrande A., Role of calculated risk in earthwork and foundation engineering. ASCE, JI of SMFD, vol n SM4 ; 1965.
- [24] Cast3M, code EF. [http ://www.cast3m.cea.fr](http://www.cast3m.cea.fr).
- [25] Cenac F., Contribution au développement et à la validation d'un modèle dynamique du comportement de la voie ferrée. Rapport de stage, SNCF, 2005.
- [26] Chaigneau L., Bacconnet C., Gourvès R., Penetration test coupled with geotechnical classification for compacting control. International conference on geotechnical and geological Engineering, Geoeng 2000.
- [27] Charbonnier A., Étude paramétrique "voie innovante" et contribution à la validation d'un modèle de voie sur le logiciel CESAR. Rapport de fin d'études de l'Ecole Centrale de Paris, 2005.
- [28] Deheeger F., Lemaire M., *Support Vector Machine for Efficient Subset Simulations : SMART Method*. Proc. 10th Int. Conf. on Applications of Stat. and Prob. In Civil Engineering, ICASP 10, Tokyo, 2007.
- [29] Der Megreditchian G., Un test non paramétrique unilatéral de rupture d'homogénéité de "k" échantillons. Revue de statistique appliquée, tome 34, n° 1, p.45-60, 1986.
- [30] Deplagne F., Bacconnet C., Analyse structurale de paramètres physiques en mécanique sur une digues en argile GRECO GEO-MATERIAUX, pp 713-717, 1992.
- [31] Ditlevsen O., Madsen H.O., *Structural Reliability Methods*. Wiley, 1996.
- [32] Dreesbeke. J-J., Eléments de statistique. Ellipse Marketing.
- [33] Dubost J., Denis A., Breysse D. et Chanson M., Analyse des désordres affectant une plate-forme ferroviaire. approche statistique et modélisation. Actes des 24<sup>mes</sup> rencontres universitaires de génie civil, La Grande Motte, 2006.
- [34] Elaskar A., Développement d'une méthode de diagnostic et évaluation du potentiel des plates-formes ferroviaires. CUST, Clermont-Ferrand, 2006.
- [35] Elkateb T., Chalaturnyk R. et Robertson PK., An overview of soil heterogeneity quantification and implantations on geotechnical field problems. Canadian Geotechnical Journal, 40, pp 1-40 ; 2003.
- [36] Ewins D.J., Model testing : theory and practice. Research studies Press ltd, Taunton, Somerset (R.U) 1984.
- [37] Farshad A., Potential application of dynamic and static cone penetrometer in MDOT pavement design and construction. Jackson State University. Jackson, Mississippi, 2003.
- [38] Fishman G.S., Monte Carlo : concepts, algorithms and applications. Springer, 1996.
- [39] Gascuel-Odeux C., Variabilité spatiale des propriétés hydriques du sol, méthodes et résultats ; cas d'une seule variable : revue bibliographique. Agronomie, 7(1), pp 61-71.
- [40] Gautier P-E., Problèmes actuels en mécanique dans le domaine ferroviaire : vers l'omniprésence du non linéaire et du stochastique. 9<sup>me</sup> colloque national en calcul des structures. Giens 2009.

- [41] Ghanem R., Spanos P.D., Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach. Springer-Verlag, 1991.
- [42] Gourvès R. & Barjot, R., The PANDA ultralight dynamic penetrometer. Proceedings of the XI ECSMFE, Copenhagen, p 83-88. 28 May- 1 June 1995.
- [43] Guide technique pour la réalisation des remblais et des couches de forme (fascicules 1 et 2), SETRA-LCPC, 1992.
- [44] Hasofer A.M., Lind M.C., An exact and invariant first order reliability format. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 100, pp. 111-121, 1974.
- [45] Heirbaut E., Modélisation dynamique de la voie ferrée. Rapport de stage, SNCF, Septembre 2007.
- [46] Fiessler B., Neuman H.J., Rackwitz R., Quadratic limit states in structural reliability. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 105, pp. 661-678, 1979.
- [47] Hohenbichler M., Goldwitzer S., Kruse W., Rackwitz R., New light on first -and second- order reliability methods. Structural Safety, Vol. 4, pp. 267 - 284, 1987.
- [48] Hosseingholian M., Etude d'une méthode d'auscultation dynamique de la structure des voies ferrées classiques, thèse de doctorat de l'université de Caen, 2007.
- [49] Hosseingholian M., Froumentin M., Levacher D., Continuous method to measure track stiffness - A new tool for inspection of rail infrastructure, World Applies Sciences Journal, Vol. 6, PP. 579-589, 2009.
- [50] Houy L., Variabilité des sols et risques liés à l'interaction sol-ouvrage. Thèse de doctorat de l'université de Bordeaux I, 2005.
- [51] Ioosse B., Van Drope F. & Devictor N., Response surface and sensitivity analysis for an environmental model of dose calculation. Reliability Engineering and System Safety 91, 2006, 1241-1251.
- [52] Jacques J., Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée. Thèse de l'université Joseph Fourier, 2005.
- [53] Jaiswal OR., Developments in modeling and analysis of railway tracks. Recent Advances in Structural Engineering, Jagadish & Iyengar Eds., Orient Blackswan ; 2005.
- [54] Lebart L., Morineau A. et Fénelon JP., Traitement des données statistiques - méthodes et programmes. Dunod, 2<sup>e</sup> édition 1982.
- [55] Lemaire M., Fiabilité des Structures - Couplage Mécano-Fiabiliste Statique. Hermès Science Publication. En collaboration avec A. Chateaneuf et J.C. Mitteau. 2005.
- [56] Lemaire M. Approche probabiliste du dimensionnement - Modélisation de l'incertain et méthodes d'approximation. Technique de l'ingénieur, BM 5 004, 2008.
- [57] Livneh M., Uncertainty associated with pre-defined correlative expressions of various *in situ* test outputs. FAA Worldwide Airport Technology Transfer Conference. Atlantic City, New Jersey, Avril 2007.
- [58] Livre blanc de l'Union européenne sur les transports, [http ://europa.eu.int/comm/energy\\_transport/en/lb\\_en.html](http://europa.eu.int/comm/energy_transport/en/lb_en.html).
- [59] Livret 5.12, Cahier des prescriptions communes applicables aux marchés de travaux d'infrastructures ferroviaires. Fascicule II : grands terrassements. février 2006.
- [60] López Pita A., Teixeira P.F. & Robusté F., High Speed track deterioration : the role of the vertical stiffness of the track. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F, Journal of Rail and Rapid Transit, vol. 218, issue 1, 2004. pp.31-40. ISSN : 0954-4097.
- [61] Lumb P., Spatial variability of soil properties. Proc. 2nd ICASP, Aachen, 1975, 379-422.
- [62] Lumb P., Variability of natural soils. Canadian Geotechnical Journal, vol 3, n 2, 74-97.
- [63] Lunne T., Robertson PK., Powell JJM., Cone penetration testing in geotechnical practice. ed. Spon press, 71-74, 1997.

- [64] Magnan J-P., Quelques spécificités du problème des incertitudes en géotechnique. Revue Française de Géotechnique 4, pp 3-10, 2000.
- [65] Magnan J-P., Bagheri S., Statistiques et probabilité en mécanique des sols, état des connaissances. Rapport de recherche LCPC n° 109, 192p, ISBN 2-720867180-X, 1982.
- [66] Magnan J-P., Les méthodes statistiques et probabilistes en mécanique des sols. Presse de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1982.
- [67] Magnan J-P., Corrélation entre les propriétés des sols. Techniques de l'Ingénieur, Traité Construction, C219. 1993.
- [68] Mathron G., Traité de géostatistique appliquée. Tome 1, Editions Technip 1962.
- [69] Matthies H.G., Brenner C.E., Bucher C.G., Guedes Soares C., Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids - Stochastic finite elements. Struct. Safety, 19(3) : 283-336, 1997.
- [70] Meier-Hirmer C., Modèles et techniques probabilistes pour l'optimisation des stratégies de maintenance. Application au domaine ferroviaire. Thèse de doctorat, université de Marne la Vallée, 2007.
- [71] Minoux M., Programmation mathématique - Théorie et algorithmes. Dunod, 1983.
- [72] Morse R.K., Importance of proper soil units for statistical analysis. Proceedings of the 1<sup>st</sup> International Conference On applications of Statistics and Probability to Soil and Structural Engineering, Hong Kong, 1971.
- [73] Nguyen V. H., Comportement dynamique de structures non-linéaires soumises à des charges mobiles. Thèse de doctorat de l'ENPC, 2002.
- [74] Norman C.D., Measurement of track modulus from a moving railcar. Master of Science, University of Nebraska, USA, 2004.
- [75] Okada K, Ghataora G.S., Use of cyclic penetration test to estimate the stiffness of railway subgrade. NDT & E International 2002 ; 35(2) : 65-74.
- [76] Oscarsson J., Dynamic train-track-ballast interaction with unevenly distributed track properties. Vehicule System Dynamic 37 ; 2002. pp 385-396.
- [77] Parez L., Bachelier M., Séchet B., Pression interstitielle développée au fonçage des pénétrètres. 6<sup>me</sup> Congrès Européen de mécanique des sols et des travaux de fondations, 1976.
- [78] Profidilis V.A., Railway engineering. Avebury Technical ; 1995.
- [79] Radampola S.S., Evaluation and modelling performance of capping layer in rail track substructure. PhD thesis, Centre for Railway Engineering, Central Queensland University, Australia ; 2006.
- [80] Rackwitz R., *Practical probabilistic approach to design first order reliability concepts for design codes*. CEB, Bulletin d'information, Vol. 112, 1976.
- [81] Revol G., Mise au point d'une méthode de diagnostic des plate-formes SNCF. CUST, Clermont-Ferrand II, 2005.
- [82] Ricci L., Modélisations discrètes et continues de la voie ferrée ballastée. Thèse de doctorat de l'ENPC, 2006.
- [83] Rosenblatt M., Remarks on a multivariate transformation. Em Ann. Math. Stat., 23 : 470-472, 1952.
- [84] Rubinstein R.Y., Kroese D.P., Simulation and the Monte Carlo method. Wiley, 2007.
- [85] Saltelli A., Tarantola S. & Campolongo F., Sensitivity analysis as an ingredient of modeling. Statistical Science, 15(4) : 377-395, 2000.
- [86] Saltelli A. & Bolado R., An alternative way to compute Fourier amplitude sensitivity test (FAST). Computational Statistics Data Analysis, 26 : 445-460, 1998.
- [87] Sanglerat G., Le pénétrètre et la reconnaissance des sols. Dunod, 1965.

- [88] Sanglerat G., Laréal P., Giell J., Correlations between in situ penetrometer tests and the compressibility characteristics of soils. Conférence sur les essais *in situ* dans les sols et les roches, 13-16 mai, Londres 1969.
- [89] Sanglerat G., Pénétrromètre statique et dynamique. Le pénétrromètre statique et la prévision des tassements. Recueil de conférences du Séminaire du C.A.S.T. sur les essais in situ, I.N.S.A. Lyon, 1971.
- [90] Sanglerat G., Le pénétrromètre et la reconnaissance des sols. éditions Dunod, 1972.
- [91] Saussine G., Contribution à la modélisation de granulats tridimensionnels : application au ballast. Thèse de doctorat de l'Université de Montpellier II, 2004.
- [92] Saussine G., Cholet C., Gautier P-E., Dubois F., Bohatier C. et Moreau J-J., Modelling ballast behaviour under dynamic loading. Part 1 : A 2D polygonal discrete element method approach, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 195 (19-22) : 2841-2859.
- [93] Sauvage G., Railway track vertical static behaviour. INRETS Report ; 1993.
- [94] Semblat JF., Dangla P., Modélisation de la propagation d'ondes et de l'interaction sol-structure : approches par éléments finis et éléments de frontières. Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées : 256-257 ; Réf. 4549 ; pp 163-178 ; 2005.
- [95] Sicsic P., Etude du comportement de la voie sous chargement cyclique : utilisation de la méthode des éléments finis en formulation eulérienne. Rapport de stage SNCF - Ecole Polytechnique, 2009.
- [96] Schuëller G.I., Stix R., A critical appraisal of methods to determinate failure probabilities. Structural Safety 1987 ; 4 : 239-309.
- [97] Shreider Y.A., The Monte-Carlo Method. Pergamon Press, 2000.
- [98] Sobol I.M., Sensitivity estimates for non linear mathematical models. Mathematical Modelling and Computational Experiments, 1 : 407 - 414, 1993.
- [99] Sol Solution., Railway investigation Innotrack project : Classical line Chambéry/Saint Pierre d'Albigny PK 157.000 to PK 151.100 Lane 1, lane 2 and track side lane 2. Geotechnical project, Juin 2008.
- [100] Sudret B., Der Kiureghian A., Stochastic finite elements and Reliability. A State-of-the-Art Report. Report N. UCB/SEMM-2000/08, Department of Civil Engineering University of California, Berkeley.
- [101] Sudret B., Der Kiureghian A., Comparison of finite element reliability methods. Probabilistic Engineering Mechanics 2002 ; 17(4) : 337-348.
- [102] Sudret B., Eléments finis stochastiques spectraux et fiabilité. Congrès Français de Mécanique, Nancy, 3-7 Septembre 2001.
- [103] Sudret B., Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. Reliability Engineering & System Safety, Volume 93, Issue 7, July 2008, pp 964-979
- [104] Supertrack, Supertrack European project : final report, numerical modelling of short-term and long-term track response. G1rd-ct-2002-00777. Technical report, SNCF, ADIF, GDS, CEDEX, ECP, LU, BV, 2002-2005.
- [105] Supertrack, R2520-2004-02. Caractérisation des limons, site de Beugnâtre, rapport technique. Signal Developpement-SNCF, 2004.
- [106] Teixeira P.F., Contribución a la reducción de los costes de mantenimiento de las vías de alta velocidad mediante la optimización de su rigidez vertical. PhD Thesis, Technical University of Catalonia. COMSA Prize 2003. ISBN B-34313-2005 & 84-689-2536-5, Reg. N 04/81296.
- [107] Vecchiato S., Développement et validation d'une version 2.0 du logiciel Dynavoie. Rapport de stage, SNCF, août 2006
- [108] Villavicencio Arancibia G., Méthodologie pour évaluer la stabilité des barrages de résidus miniers. Thèse de doctorat de l'université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand II 2009.

- [109] Vymlátil P., Modeling of railway track. Brno University of Technology, Czech Republic, project No. 1M0579, 2006.
- [110] Yong S., Etude du comportement mécanique des voies de chemin de fer (parties 1, 2, 3, 4 et 5). Rapport Technique, Signal Developpement-SNCF, 2005.
- [111] Zhou S., Caractérisation des sols de surface à l'aide du pénétromètre dynamique léger de type Panda. Thèse de doctorat de l'université Blaise Pascal - Clermont-Fd II, 1997.

## Annexe A

# Vérification de l'ajustement d'une loi théorique à une distribution empirique par les tests d'adéquation de $\chi^2$

### A.1 Introduction

En statistique, un test d'hypothèse est une démarche consistant à rejeter ou à accepter une hypothèse statistique, appelée hypothèse nulle, en fonction d'un jeu de données (échantillon).

Les tests d'adéquation permettent de prendre la décision d'accepter ou de rejeter l'hypothèse qu'une loi théorique choisie représente bien la répartition expérimentale. Les tests d'adéquation ne permettent pas de trouver la loi d'une v.a., mais seulement d'accepter ou de rejeter une hypothèse simple émise a priori.

Des test non paramétriques tel le test de  $\chi^2$  (khi-deux) ou Kolmogorov-Smirnov peuvent être utilisés dans ce contexte ; bien qu'ils peuvent être utilisés en tant que tests d'homogénéité ou d'indépendance. Nous détaillons dans la suite ces deux test dans le context d'adéquation

### A.2 Position du problème

Dans ce type de situation nous disposons d'une répartition empirique issue du traitement statistique et on cherche une loi qui approxime au mieux cette répartition. La question se pose si l'échantillon empirique a été prélevé dans une population dont la distribution suit une loi théorique ?. Cette hypothèse n'exclu pas les écarts, inévitables, entre la distribution empirique et la loi théorique.

Le donnée de départ est un N-échantillon experimental ordonné  $E_N = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N\}$ , supposé de taille suffisamment grande. Les éléments de cet échantillon sont assimilés à des réalisations indépendantes d'une variable réelle  $\mathbb{X}$  et on suppose qu'un certain nombre de raisons liées liées au contexte de l'étude permettent de conjecturer pour  $\mathbb{X}$  une répartition selon une loi de probabilité théorique donnée  $\mathbb{P}_X$ . Les paramètres dont depend cette loi ayant été déterminés, on vérifiera alors si elle constitue une approximation "acceptable" de la répartition expérimentale.

### A.3 Test de khi-deux

Soit  $S$  le support de la loi théorique, dont on notera qu'il peut revêtir plusieurs formes (par exemple ,  $S = ]-\infty, b]$ ,  $S = [a, +\infty[$ ,  $S = [a, b]$ , avec  $a, b$  des réelles finies, mais doit vérifier, dans tous les cas :  $S \supset [\hat{x}_1, \hat{x}_N]$ . ce support étant connu, on le partitionne en  $K$  intervalles  $I_1, \dots, I_K$  ( $K \ll N$ ) et on comptabilise les éléments de  $E_N$  contenus dans chacun de ces intervalles.

Ce faisant, on obtient une répartition des données expérimentales en  $K$  classes disjointes  $C_1, \dots, C_K$ , telles que  $\forall j \in J_K = \{1, \dots, K\}$ ,  $C_j$  est une famille des éléments de  $E_N$  appartenant à l'intervalle  $I_j$ .

On a donc :

$$\bigcup_{j \in J_K} C_j = E_N \quad C_i \cap C_j = \emptyset \quad (A.1)$$

et  $N_j$  désignant l'effectif de la classe  $C_j$  :

$$\sum_{j \in J_K} N_j = N \quad (A.2)$$

où  $N$  est le cardinal de  $E_N$ .

Soit  $p_j$  la probabilité que la v.a.  $X$ , supposée obéir à la loi théorique choisie  $\mathbb{P}_X$ , prenne des valeurs dans l'intervalle  $I_j$ . Notant  $F_X$  la fonction de répartition de  $\mathbb{P}_X$ , on a :

$$p_j = P(X \in I_j) = \mathbb{P}_X(I_j) = F_X(x_{max,j}) - F_X(x_{min,j}) \quad (A.3)$$

où  $x_{min,j}$ ,  $x_{max,j}$  sont, respectivement, les bornes inférieure et supérieure de  $I_j$ .

A cette probabilité est associé l'effectif théorique  $N_{th,j}$  de  $C_j$ , tel que :

$$N_{th,j} = N_{p,j} \quad (A.4)$$

on fait l'hypothese  $H_0$  : "la loi théorique choisie représente bien la répartition expérimentale", autrement dit "les écarts entre les effectifs théoriques et expérimentaux dans les diverses classes sont dus uniquement au hasard de l'échantillonnage". Il s'agit alors de comparer les effectifs théoriques  $N_{th,1} = N_{p,1}, \dots, N_{th,K} = N_{p,K}$  et les effectifs expérimentaux  $N_1, \dots, N_K$ .

Le test est basé sur l'indicateur de proximité suivant :

$$D = \sum_{j \in J_K} \frac{(N_j - N_{p,j})^2}{N_{p,j}} \quad (A.5)$$

appelé distance de  $\chi^2$ .

Il est claire que cette grandeur sera d'autant plus petite que la distribution théorique sera proche de la distance empirique. si la divergence entre les deux distributions est seulement due aux incertitudes d'échantillonnage (*i.e.* au hasard), la valeur de  $D$  ne devrait pas dépasser, pour un seuil de signification  $\alpha$  fixé à l'avance, une certaine valeur limite  $D_\alpha$  à déterminer.

K.Pearson a étudié la loi de la v.a.  $D$  conditionnellement à l'hypothese  $H_0$ . il a montré que, sous l'hypothese : " $\forall j \in J_K, N_{p,j} \geq 5$ " (*i.e.* l'effectif théorique minimal de chaque classe est 5), cette v.a. suit une loi de  $\chi^2$  à  $K - r - 1$  degrés de liberté (*i.e.*  $D \sim \chi_{K-r-1}^2$  ou  $r$  est le nombre de paramètres inconnus de la loi théorique devant préalablement être estimés à partir de l'échantillon expérimental  $E_N$  (par exemple, si l'hypothese  $H_0$  est : " $X \sim N(m, \sigma)$ ,  $m$  et  $\sigma$  connus", alors  $r = 0$  et  $D \sim \chi_{K-1}^2$  ; par contre si  $H_0$  est : " $X \sim N(m, \sigma)$ ,  $m$  et  $\sigma$  inconnus", alors on estime d'abord  $m$  et  $\sigma$  à partir de  $E_N$  et dans ce cas  $D \sim \chi_{K-3}^2$  car  $r = 2$ ).

le test est alors conforme à la procedure générale des test, mais en utilisant ici pour statistique la distance de  $\chi^2$  :



1. Au seuil  $\alpha$  choisi (par exemple,  $\alpha = 0.05$  ou  $\alpha = 0.01$ ) , on determine le nombre  $D_\alpha$  tel que :

$$P(D > D_\alpha) = \alpha \quad (\text{A.6})$$

Ceci se fait soit en utilisant une table de  $\chi^2$ , soit en résolvant directement l'équation non linéaire en  $D_\alpha$  :

$$1 - F_D(D_\alpha) = \alpha \quad (\text{A.7})$$

où  $F_D$  est la fonction de répartition de la loi de  $D$ , c'est-à-dire du  $\chi^2_{K-r-1}$ .

2. Si la distance  $D$  calculée par l'équation A.5 est supérieure à  $D_\alpha$ , alors on rejette l'hypothèse  $H_0$  au seuil de signification  $\alpha$  ; dans le cas contraire, on accepte  $H_0$  pour ce seuil. toutefois, dans ce dernier cas, il importe de souligner que la validité de  $H_0$  n'en est pas autant démontrée.

## Annexe B

# Pratique du test d'adéquation de Kolmogorov

### B.1 Position du problème

On dispose d'un  $N$ -échantillon ordonné  $E_N = \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N\}$  de réalisations d'une variable aléatoire réelle  $X$  de loi  $P_X$  *a priori* inconnue.

Soit  $\hat{F}_X^M$  une estimée de la fonction de répartition de  $X$ , obtenue à partir de l'échantillon  $E_N$  comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{F}_X^M(x) &= \sum_{j \in J_M} \frac{\sum_{k=1}^j N_k}{N} \mathbb{1}_{D_j}(x) \\ &= \frac{N_1}{N} \mathbb{1}_{D_1}(x) + \frac{N_1 + N_2}{N} \mathbb{1}_{D_2}(x) + \frac{N_1 + \dots + N_M}{N} \mathbb{1}_{D_M}(x), x \in \bar{X}\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

où :

- $\bar{X} = [\hat{x}_1, \hat{x}_N]$  est le domaine d'estimation ;
- $M$  est un entier  $\geq 1$ , petit devant  $N$  ;
- $J_M$  est le sous-ensemble fini ordonné de  $\mathbb{N} : J_M = \{1, \dots, M\}$  ;
- $\{D_1, \dots, D_M\}$  est une subdivision régulière de  $\bar{X}$  en  $M$  intervalles de longueur :

$$\delta = |D_j| = \frac{|\bar{X}|}{M} = \frac{|\hat{x}_N - \hat{x}_1|}{M}$$

et tels que,  $\forall j \in J_M$  :

$$D_j = \begin{cases} [\hat{x}_1 + (j-1)\delta, \hat{x}_1 + j\delta[ & \text{si } j \in \{1, \dots, M-1\} = J_M \setminus \{M\} \\ [\hat{x}_1 + (M-1)\delta, \hat{x}_1 + M\delta] = [\hat{x}_{N-1}, \hat{x}_N] & \text{si } j = M \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] : x \rightarrow F(x)$  une fonction de répartition théorique. On cherche alors à savoir si cette dernière pourrait être choisie comme fonction de répartition de la loi  $P_X$  de  $X$ , qui est inconnue mais dont on dispose d'une estimée  $\hat{F}_X^M$  de la fonction de répartition.

### B.2 Résolution du problème

En fait, pour tout  $x$  fixé dans  $\bar{X}$ ,  $\hat{F}_X^M(x)$  doit être vue comme une réalisation d'une variable aléatoire scalaire  $F_X^M(x)$ . Introduisons alors la variable aléatoire à valeurs dans  $[0, 1]$  :

$$D = \max_{x \in \bar{X}} |F_X^M(x) - F(x)| \quad (\text{B.3})$$

où l'on notera bien que  $F(x)$  (valeur en  $x$  de la fonction de répartition théorique  $F$ ) n'est pas aléatoire : c'est un nombre réel compris entre 0 et 1.

On montre que pour tout  $\lambda \geq 0$  et pour  $N$  suffisamment grand, la probabilité de l'événement  $(D\sqrt{N} \geq \lambda)$  est indépendante de  $N$  et peut être approchée par :

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2\lambda^2) \quad (\text{B.4})$$

À titre d'illustration, le tableau 1 ci-dessous donne les valeurs approchées de cette probabilité pour quelques valeurs usuelles de  $\lambda$ .

$\lambda$	$P(\lambda)$		$\lambda$	$P(\lambda)$		$\lambda$	$P(\lambda)$
0,0	1,000		0,7	0,711		1,4	0,040
0,1	1,000		0,8	0,544		1,5	0,022
0,2	1,000		0,9	0,393		1,6	0,012
0,3	1,000		1,0	0,270		1,7	0,006
0,4	0,997		1,1	0,178		1,8	0,003
0,5	0,964		1,2	0,112		1,9	0,002
0,6	0,864		1,3	0,068		2,0	0,001

Tableau 1. Valeurs de  $P(\lambda)$  pour quelques valeurs de  $\lambda$ .

Le test d'adéquation de Kolmogorov s'utilise alors comme suit :

1. La fonction de répartition estimée (B.1) étant déterminée et la fonction de répartition théorique  $F$  donnée, on calcule :

$$\hat{D} = \max_{x \in \bar{X}} |\hat{F}_X^M(x) - F(x)| \quad (\text{B.5})$$

puis :

$$\hat{\lambda} = \hat{D}\sqrt{N} \quad (\text{B.6})$$

2. On fait l'hypothèse :

H : la loi  $P_X$  de  $X$  a pour fonction de répartition  $F$ .

3. On se donne un seuil de signification  $\alpha$  petit, par exemple  $\alpha = 0,05$ ,  $\alpha = 0,025$  ou  $\alpha = 0,01$ , et à l'aide de (B.4) (ou par interpolation dans le tableau 1), on calcule la valeur  $\lambda_\alpha$  de  $\lambda$  telle que :

$$P(\lambda_\alpha) = \alpha$$

4. On a alors le résultat suivant :
  - si  $\hat{\lambda} \geq \lambda_\alpha$ , l'hypothèse H, doit être rejetée
  - si  $\hat{\lambda} < \lambda_\alpha$ , l'hypothèse H peut être acceptée.

### Remarque 1

Le test de Kolmogorov a l'avantage d'être plus simple d'emploi que celui du  $\chi^2$ . Il faut toutefois noter qu'il suppose parfaitement connue la fonction de répartition théorique  $F$ . Or, en pratique, si on connaît l'expression générale de  $F$  (on suppose par exemple que c'est la fonction de répartition d'une loi  $N(m, \sigma^2)$ ), on connaît rarement les valeurs de ses paramètres caractéristiques (par exemple  $m$  et  $\sigma$  dans l'exemple précédent) et il est nécessaire de les estimer préalablement à partir de l'échantillon. Dans le test de  $\chi^2$ , on tient compte de cette situation en diminuant le nombre de degrés de liberté. Le test de Kolmogorov ne prévoit pas cette éventualité. Généralement, si on l'utilise en remplaçant certains paramètres de  $F$  (voire tous) par des estimées statistiques, il donne des valeurs nettement exagérées de la probabilité  $P(\lambda)$ , de sorte que dans certains cas on risque d'être amené à ne pas rejeter une hypothèse de conformité qui devrait l'être.

## Remarque 2

En pratique, le test de Kolmogorov est particulièrement bien adapté au jugement de l'adéquation à des lois gaussiennes. Or, on peut toujours se ramener à cette situation. On sait en effet que si  $X$  est une variable aléatoire continue de loi donnée, alors on peut toujours trouver une transformation  $T$  telle que  $Y = T(X)$  soit une variable aléatoire distribuée suivant une loi gaussienne standard :  $Y \sim N(0, 1)$ . Partons alors de l'échantillon initial  $E_N = \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N\}$  et supposons que nous voulions tester l'hypothèse  $H^X$  :  $E_N$  est un échantillon de réalisations d'une variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F$  donnée. Supposons en outre,  $F$  étant connue, que nous soyons capables de construire la transformation  $T$  telle que  $Y = T(X) \sim N(0, 1)$ . Appliquant cette transformation à  $E_N$ , nous en déduisons l'échantillon  $\varepsilon_N = \{\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_N\}$  tel que,  $\forall k \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\hat{y}_k = T(\hat{x}_k)$ . Alors, tester l'hypothèse  $H^X$  est équivalent à tester l'hypothèse  $H^Y$  :  $\varepsilon_N$  est un échantillon de réalisations d'une variable aléatoire  $Y$  gaussienne standard. Une fois déterminé l'échantillon  $\varepsilon_N$  il suffit alors d'appliquer le test de Kolmogorov à cet échantillon en prenant pour fonction de répartition théorique celle,  $\Phi$ , de la loi  $N(0, 1)$ , telle que,  $\forall y \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du$ .

Nous donnons ci-après les expressions de  $T$  pour quelques types de lois initiales.

## Expression de $T$ pour quelques types de lois initiales

Nous supposons que le  $N$ -échantillon numérique  $E_N = \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N\}$  est relatif à une v.a.  $X$  de loi donnée et, sous cette hypothèse, nous explicitons la transformation  $T$  telle que  $Y = T(X) \sim N(0, 1)$ . Nous noterons  $\hat{m}_X$  et  $\hat{\sigma}_X^2$  les estimées de la moyenne et de la variance de  $X$  telles que :

$$\begin{cases} \hat{m}_X = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{x}_k \\ \hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \hat{x}_k^2 - \hat{m}_X^2 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

1. Cas où  $X$  est supposée uniforme de moyenne  $\hat{m}_X$  et de variance  $\hat{\sigma}_X^2$  :

$$T(x) = \Phi^{-1} \left( \frac{x - \hat{m}_X + \sqrt{3}\hat{\sigma}_X}{2\sqrt{3}\hat{\sigma}_X} \right) \quad (\text{B.8})$$

2. Cas où  $X$  est supposée gaussienne de moyenne  $\hat{m}_X$  et de variance  $\hat{\sigma}_X^2$  :

$$T(x) = \frac{x - \hat{m}_X}{\hat{\sigma}_X} \quad (\text{B.9})$$

3. Cas où  $X$  est supposée lognormale de moyenne  $\hat{m}_X$  et de variance  $\hat{\sigma}_X^2$  :

$$T(x) = \frac{\ln x - \hat{m}}{\hat{\sigma}} \quad (\text{B.10})$$

avec :

$$\hat{m} = \ln \left( \frac{\hat{m}_X}{\sqrt{1 + \hat{V}_X^2}} \right) \quad ; \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\ln(1 + \hat{V}_X^2)} \quad ; \quad \hat{V}_X = \frac{\hat{\sigma}_X}{\hat{m}_X}$$

4. Cas où  $X$  est supposée gaussienne tronquée, de moyenne  $\hat{m}_X$ , de variance  $\hat{\sigma}_X^2$  et de support  $[a, b]$ ,  $a < b$  :

$$T(x) = \Phi^{-1} \left( \frac{\Phi(\frac{x-\hat{m}}{\hat{\sigma}}) - C_0}{C_1 - C_0} \right) \quad (\text{B.11})$$

avec  $\hat{m}$  et  $\hat{\sigma}$  solutions du système non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{m}_X = \hat{m} \left( 1 - \left( \frac{\hat{\sigma}}{\hat{m}} \frac{D_1 - D_0}{C_1 - C_0} \right) \right) \\ \hat{\sigma}_X = \hat{\sigma} \sqrt{1 - \frac{(b-\hat{m})D_1 - (a-\hat{m})D_0}{\hat{\sigma}(C_1 - C_0)} - \left( \frac{D_1 - D_0}{C_1 - C_0} \right)^2} \\ \text{avec :} \\ C_0 = \Phi\left(\frac{a-\hat{m}}{\hat{\sigma}}\right) \quad ; \quad C_1 = \Phi\left(\frac{b-\hat{m}}{\hat{\sigma}}\right) \\ D_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-\hat{m}}{\hat{\sigma}}\right)^2} \quad ; \quad D_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{b-\hat{m}}{\hat{\sigma}}\right)^2} \end{array} \right. \quad (\text{B.12})$$

5. Cas où  $X$  est supposée lognormale tronquée, de moyenne  $\hat{m}_X$ , de variance  $\hat{\sigma}_X^2$  et de support  $[a, b]$ ,  $a < b$  :

$$T(x) = \Phi^{-1} \left( \frac{\Phi(\frac{\ln x - \hat{m}}{\hat{\sigma}}) - A_0}{B_0 - A_0} \right) \quad (\text{B.13})$$

avec  $\hat{m}$  et  $\hat{\sigma}$  solutions du système non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{m}_X = \frac{B_1 - A_1}{B_0 - A_0} e^{\hat{m} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}} \\ \hat{V}_X = \sqrt{\frac{(B_0 - A_0)(B_2 - A_2)}{(B_1 - A_1)^2} e^{\hat{\sigma}^2} - 1} \\ \text{avec :} \\ A_0 = \Phi\left(\frac{\ln a - \hat{m}}{\hat{\sigma}}\right) \quad ; \quad B_0 = \Phi\left(\frac{\ln b - \hat{m}}{\hat{\sigma}}\right) \\ A_1 = \Phi\left(\frac{\ln a - \hat{m}}{\hat{\sigma}} - \hat{\sigma}\right) \quad ; \quad B_1 = \Phi\left(\frac{\ln b - \hat{m}}{\hat{\sigma}} - \hat{\sigma}\right) \\ A_2 = \Phi\left(\frac{\ln a - \hat{m}}{\hat{\sigma}} - 2\hat{\sigma}\right) \quad ; \quad B_2 = \Phi\left(\frac{\ln b - \hat{m}}{\hat{\sigma}} - 2\hat{\sigma}\right) \end{array} \right. \quad (\text{B.14})$$

## Annexe C

# Intervalles de confiance d'estimations

Soit un échantillon expérimental  $E_N = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N\}$ , de taille  $N$ . Les éléments de cet échantillon sont assimilés à des réalisations indépendantes d'une variable réelle  $\mathbb{X}$  paramétrée par  $\theta$ . Plutôt que d'estimer ponctuellement la vraie valeur inconnue du paramètre  $\theta$ , on recherche un intervalle recouvrant «très vraisemblablement» cette vraie valeur qu'on appellera intervalle de confiance (I.C.). Un intervalle de confiance d'un paramètre est donc une estimation par intervalle de ce paramètre.

### C.1 Définition

On appelle intervalle de confiance ( $IC$ ) de niveau de confiance  $1 - \alpha$  du paramètre  $\theta$  tout intervalle  $IC$  tel que :  $P(\theta \in IC) = 1 - \alpha$  pour  $\alpha \in [0, 1]$  fixé *a priori*. On attribue un coefficient de risque ( $\alpha$ ) aux estimations par  $IC$ . Les bornes de l'intervalle de confiance dépendent de l'échantillon, elles sont donc aléatoires.

Pour construire un intervalle de confiance, on utilise une variable aléatoire dont on connaît la distribution de probabilité.

### C.2 Forme des intervalles de confiance

Pour un intervalle de confiance, le risque  $\alpha$  représente la probabilité de se tromper, c'est-à-dire que l'I.C. ne contienne pas la vraie valeur. Cette probabilité peut être répartie différemment de part et d'autre des bornes de l'intervalle de confiance.

Nous pouvons donc écrire  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ , où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  mesurent respectivement les risques à gauche et à droite de dépasser un seuil plafond.

L'intervalle de confiance est dit bilatéral si  $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ . Si de plus  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$  l'intervalle est dit symétrique (il est dissymétrique sinon).

L'intervalle de confiance est dit unilatéral si  $\alpha_1, \alpha_2 = 0$  :

- quand on veut assurer une valeur minimale au paramètre à estimer, on considère  $\alpha_1 = \alpha$  et  $\alpha_2 = 0$ , l'intervalle de confiance est dans ce cas de la forme :  $IC = [a, +\infty[$ .
- quand on ne veut absolument pas dépasser un seuil maximal, on prend  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = \alpha$  on a dans ce cas un intervalle de confiance de la forme :  $IC = ]-\infty, b]$ .

### C.3 Intervalles de confiance pour l'espérance

Nous distinguons deux cas :

- la variable aléatoire mesurée est normale et le nombre de réalisations est quelconque,

- la variable aléatoire mesurée n'est pas normale et le nombre de réalisations est important ( $>30$ ). Dans ce cas, la distribution de la moyenne empirique tend vers une loi normale d'après le théorème central limite. On parlera d'intervalle de confiance asymptotique.

Dans ce qui suit, on considère  $X \sim N(m, \sigma^2)$  et  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N$   $N$  réalisations indépendantes de la variable réelle  $\mathbb{X}$ .

On définit  $m_X$  et  $S_X^2$ , respectivement moyenne empirique de  $\mathbb{X}$  et variance empirique modifiée comme suit :

$$m_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{x}_i \quad ; \quad S_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_i - m_X)^2 \quad (\text{C.1})$$

### C.3.1 Cas où la variance est connue

Après centrage et réduction de la moyenne empirique, on obtient :  $\sqrt{N} \frac{m_X - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$ . On a :

$$P(-u < \sqrt{N} \frac{m_X - m}{\sigma} < u) = 1 - \alpha \quad (\text{C.2})$$

où  $u$  est le fractile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la loi  $N(0, 1)$ . Ce qui permet d'écrire :

$$P(m_X - u \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < m < m_X + u \frac{\sigma}{\sqrt{N}}) = 1 - \alpha. \quad (\text{C.3})$$

Quand la variance est connue, l'intervalle de confiance bilatéral symétrique pour l'espérance d'une loi normale s'écrit donc au niveau  $1 - \alpha$  sous la forme suivante :

$$IC(m) = [\tilde{m}_X - u \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \tilde{m}_X + u \frac{\sigma}{\sqrt{N}}] \quad (\text{C.4})$$

où  $\tilde{m}_X$  est la réalisation de  $m_X$  sur l'échantillon.

Remarque :

- si  $\alpha = 5\%$ , le fractile d'ordre 0,975 de la loi normale centrée réduite correspond à 1,96,
- si  $\alpha = 10\%$ , le fractile d'ordre 0,95 de la loi normale centrée réduite vaut environ 1,64.

Il est bien évident que si  $\alpha$  augmente (ou que si  $N$  augmente), l'amplitude de l'intervalle de confiance diminue.

### C.3.2 Cas où la variance est inconnue

Dans ce cas, on vérifie  $\sqrt{N} \frac{m_X - m}{S_X} \sim St(N-1)$  (loi de Student à  $N-1$  degrés de libertés), d'où

$$P(-t < \sqrt{N} \frac{m_X - m}{S_X} < t) = 1 - \alpha \quad (\text{C.5})$$

où  $t$  est le fractile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la loi  $St(N-1)$  ; ce qui conduit à écrire :

$$P(m_X - t \frac{S_X}{\sqrt{N}} < m < m_X + t \frac{S_X}{\sqrt{N}}) = 1 - \alpha \quad (\text{C.6})$$

L'intervalle de confiance bilatéral symétrique pour l'espérance d'une loi normale s'écrit donc au niveau  $1 - \alpha$  sous la forme suivante :

$$IC(m) = [\tilde{m}_X - t \frac{\tilde{S}_X}{\sqrt{N}}, \tilde{m}_X + t \frac{\tilde{S}_X}{\sqrt{N}}] \quad (\text{C.7})$$

où  $\tilde{m}_X$  et  $\tilde{S}_X$  sont des réalisations respectives de  $m_X$  et  $S_X$  sur l'échantillon.

Remarque : pour un échantillon de taille importante ( $N \rightarrow \infty$ ), on approxime la loi de Student par la loi normale centrée réduite. On se retrouve alors dans le cas précédent.

## Annexe D

# Modélisation stochastique des paramètres incertains

L'étude de l'effet des incertitudes affectant les paramètres d'un modèle physique sur la variabilité de sa réponse, nécessite de modéliser ces paramètres par des grandeurs probabilistes. Les paramètres incertains d'un modèle mécanique peuvent être modélisés par :

- soit par des variables aléatoires (v.a.), à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , généralement caractérisées par leur densité de probabilité ou leur fonction de répartition ;
- soit par des processus stochastiques : soit  $d$  un entier  $\geq 1$  et  $T$  un sous-ensemble quelconque de  $\mathbb{R}^d$  ; un processus stochastique défini sur un espace probabilisé  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$  indexé sur  $T$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , est une application  $t \rightarrow X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$  de  $T$  dans l'espace  $L^0(\mathcal{A}, \mathbb{R}^n)$  des variables aléatoires définies sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Ceci signifie que pour tout  $t$  fixé dans  $T$ ,  $X(t)$  est une variable aléatoire définie sur  $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Le processus peut ainsi être vu comme une famille de variables aléatoires  $n$ -dimensionnelle  $\{X(t), t \in T\}$ . Lorsque  $d > 1$  on parle de champ stochastique (ou aléatoire) à la place de processus stochastique.

Bien qu'ils soient de manipulation plus complexe, les champs aléatoires modélisent de façon plus réaliste les paramètres mécaniques incertains pour lesquels la prise en compte de la variabilité spatiale est nécessaire. dans ce travail toutefois, nous nous sommes limités à des modélisations par variables aléatoires.

### D.1 Choix des lois de probabilité

L'attribution des lois de probabilité aux paramètres incertains du problème est également un point très important. Nous rappelons dans ce paragraphe les principales lois de probabilité utilisées dans la suite, à savoir la loi gaussienne, la loi lognormale et la loi uniforme.

#### D.1.1 Variable aléatoire gaussienne $n$ -dimensionnelle

**Cas général  $n \geq 1$**

Une v.a.  $X = (X_1, \dots, X_n)^T$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  non dégénérée, du second ordre, de moyenne  $m_X = \mathbb{E}[X]$  et de matrice de covariance  $C_X = \mathbb{E}[(X - m_X)(X - m_X)^T]$  est dite gaussienne si sa loi admet une densité  $p_X$  qui s'écrit,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  :

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C_X|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} Q_X(x)\right) \quad (\text{D.1})$$



avec

$$Q_X(x) = \langle C_X^{-1}(x - m_X), x - m_X \rangle \quad (\text{D.2})$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire euclidien canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $|C_X|$  le déterminant de  $C_X$ .

### Cas particulier $n = 1$

Dans ce cas, la densité de probabilité  $p_X(x)$  s'écrit  $\forall(x) \in \mathbb{R}$  :

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] \quad (\text{D.3})$$

où  $m_X$  est l'espérance (ou la moyenne) de  $X$  et  $\sigma_X$  son écart-type.

### D.1.2 Variable aléatoire lognormale n-dimensionnelle

#### Cas général $n \geq 1$

Une v.a.  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  non dégénérée, du second ordre, de moyenne  $m_Y = \mathbb{E}[Y]$  et de matrice de covariance  $C_Y = \mathbb{E}[(Y - m_Y)(Y - m_Y)^T]$  est dite lognormale si  $m_Y \in (\mathbb{R}_+^*)^n$  et si sa loi admet une densité  $p_Y$  qui s'écrit,  $\forall(y) \in \mathbb{R}^n$  :

$$p_Y(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |b|^{\frac{1}{2}} \prod_{p=1}^n y_p} \exp\left(-\frac{1}{2} Q_Y(y)\right) \mathbf{1}_{(\mathbb{R}_+^*)^n}(y) \quad (\text{D.4})$$

avec :

$$Q_Y(y) = \langle b^{-1}(\ln(y) - \ln(a)), \ln(y) - \ln(a) \rangle \quad (\text{D.5})$$

où  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)^T$  et où on définit :

$$\ln(y) = \begin{pmatrix} \ln(y_1) \\ \vdots \\ \ln(y_p) \\ \vdots \\ \ln(y_n) \end{pmatrix}, \quad \ln(a) = \begin{pmatrix} \ln(a_1) \\ \vdots \\ \ln(a_p) \\ \vdots \\ \ln(a_n) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} & \dots & b_{pn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nq} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

avec,  $\forall(p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$  :

$$a_p = \frac{m_{Y_p}}{\sqrt{1+v_{Y_p}^2}}, \quad b_{pq} = \ln\left(1 + \frac{C_{Y_p Y_q}}{m_{Y_p} m_{Y_q}}\right) = b_{qp}, \quad v_{Y_p} = \frac{\sigma_{Y_p}}{m_{Y_p}} = \frac{C_{Y_p Y_p}^{\frac{1}{2}}}{m_{Y_p}} \quad (\text{D.7})$$

$m_{Y_p}$  est la coordonnée de rang  $p$  de  $m_Y$ ,  $C_{Y_p Y_q}$  le terme de rang  $(p, q)$  de la matrice  $C_Y$  et  $v_p$  le coefficient de variation de la coordonnée  $Y_p$  de  $Y$ .

### Cas particulier $n = 1$

Cette loi dérive de la loi normale et son support est  $\mathbb{R}_+^*$ . La densité de probabilité d'une v.a  $Y$  de loi lognormale s'écrit,  $\forall y \in \mathbb{R}$  :

$$p_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi b}} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln(y) - \ln(a))^2}{2b}\right] \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+^*}(y) \quad (\text{D.8})$$

Les paramètres  $a$  et  $b$  sont reliés à l'espérance  $\mu$  et à l'écart type  $\sigma$  de la variable gaussienne  $X$  par les expressions :

$$a = \left(\frac{m_Y}{\sqrt{1+v_Y^2}}\right) \quad , \quad b = \ln(1 + v_Y^2) \quad , \quad v_Y = \frac{\sigma_Y}{m_Y} \quad (\text{D.9})$$

### D.1.3 Variable uniforme scalaire

Une v.a. scalaire continue  $Y$  est dite suivre une loi uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$ , avec  $a$  et  $b$  deux réels quelconques tels que  $a < b$ , si sa densité de probabilité  $p_Y$  s'écrit,  $\forall y \in \mathbb{R}$  :

$$p_Y(y) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a,b]}(y) \quad (\text{D.10})$$